

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN
E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND III, HEFT 4

MIT 35 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 16. AUGUST 1949)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1949

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)

Wien I, Mülkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band III, Heft 4

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten.

	Seite
K. Jäger, Die Verbundwirkung zwischen Stahlträger und Stahlbetonplatte. (Mit 9 Textabbildungen.)	295
A. Reuschel, Konstruktion des Drehpolplanes einer Zwanglaufkette beim Zusammenfallen von Polgeraden mittels einer kinematisch äquivalenten Polfigur. (Mit 15 Textabbildungen.)	311
E. Ledinegg, Über die Bestimmung der Permeabilität von plattenförmigen Materialien im Zentimeter-Wellengebiet	325
G. Heinrich, Auswertung von Stoßmessungen mittels Laplace-Transformation	327
H. Parkus, Die Torsion der Kreiswelle mit rechteckiger Längsnut. (Mit 5 Textabbildungen.)	336
K. M. Koch, Grundsätzliches zum Verhalten der Supraleiter im Magnetfeld. (Mit 6 Textabbildungen.)	344
E. Skudrzyk, Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper	356
M. Z. Krzywoblocki, On Steady, Laminar, Round Jets in Compressible Viscous Gases far Behind the Mouth	373

Buchbesprechungen 383

Fischer E., Kraus K., Musil L. und G. Oberdorfer, Probleme der österreichischen Elektrizitätswirtschaft (H. Melan). — Bruckmayer F., Der praktische Wärme- und Schallschutz im Hochbau (C. Kämmerer). — Vale jr. J. W., The Aviation Mechanic's Aircraft Manual with Questions and Answers (F. Magyar). — Oberdorfer G., Das natürliche Maßsystem (R. Bruniak). — Mott N. F. und I. N. Sneddon, Wave Mechanics and its Applications (L. Flamm). — List H. und G. Reyl, Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine. Die Verbrennungskraftmaschine, Bd. 4, 1. Teil (L. Richter).

Die Verbundwirkung zwischen Stahlträger und Stahlbetonplatte.

Von K. Jäger, Wien.

Mit 9 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Nachfolgend werden die Spannungen in einem aus Stahlträger und Betonplatte zusammengesetzten, auf Biegung beanspruchten Verbundbalken untersucht. Durch den mittels Schrägeisen bewirkten unstetigen Verbund treten in der Betonplatte Spannungserhöhungen auf, deren Einfluß auf die Bemessung nachgewiesen wird.

Summary. Investigation of the stresses, set up by bending, in a compound girder, composed of a steel beam and a concrete plate. The discontinuous interconnection, by means of oblique ties, causes increased stresses in the concrete plate. Demonstration of the influence on dimensioning.

Résumé. Étude des tensions, dues à la flexion d'une poutre composée d'un profilé d'acier et d'une plaque de béton. La discontinuité de l'assemblage, constitué par des tirants obliques, donne lieu à une augmentation des fatigues dans la plaque de béton. L'influence sur les dimensions nécessaires est démontrée.

I. Problemstellung.

Eine Tragkonstruktion besteht aus mehreren, in gleichen Abständen nebeneinanderliegenden I-Trägern und einer darüber befindlichen Betonplatte. Wenn von der nur für kleine Laststufen vorhandenen Haftreibung zwischen Träger und Platte abgesehen wird, so haben die Stahlträger wegen ihres im allgemeinen weitaus größeren Biege widerstandes nahezu die gesamten äußeren Lasten samt Eigengewicht der Platte zu übernehmen. Das einheitliche Zusammenwirken beider Teile bei der Aufnahme der äußeren Lasten ist nur durch eine laufende Verbindung zu erreichen, welche durch Flacheisen, Formeisen oder Schrägeisen (Rundstähle) erfolgen kann, die auf den Stahlträger zweckmäßig aufgeschweißt werden. Die ersten eingehenden Versuche mit derartigen Verbundbalken wurden von F. Stüssi durchgeführt.¹ A. Albrecht gibt über die Entwicklung dieser Konstruktionsform in den letzten 15 Jahren einen zusammenfassenden Bericht,² der auch weitere Literaturangaben enthält, und ermittelt die Spannungsverteilung im Verbundbalken unter der üblichen Annahme eines stetigen Verbundes, wobei außerdem die Betonplatte mit ihrer vollen Breite in Rechnung gestellt wird. Unter Berücksichtigung der örtlichen Kraftübertragung zwischen Stahlträger und Betonplatte tritt aber in dieser eine über die Breite ungleichmäßige Spannungsverteilung auf und die hierdurch bewirkte größere Nachgiebigkeit vermindert den nach der elementaren Biegetheorie berechneten Wirkungsgrad des Verbundes. Diese als Problem der „mittragenden Breite“ bekannte Aufgabe wurde unter Annahme eines stetigen Verbundes für den T-Querschnitt und I-Querschnitt von K. Girkmann³

¹ F. Stüssi: Profilträger, kombiniert mit Beton, auf Biegung beansprucht. Versuche, ausgeführt im Auftrage der Technischen Kommission des Verbandes Schweizerischer Brückenbau- und Stahlbetonbauunternehmungen, IVBH, Kongreß Paris 1932, Schlußbericht.

² A. Albrecht: Der Verbundträger. Schweiz. Bau-Ztg. (1945).

³ K. Girkmann: Spannungsverteilung in geschweißten Blechträgern. Stahlbau (1933). Flächentragwerke. Wien: Springer-Verlag. 1946.

behandelt. Eine zusammenfassende Darstellung der hier in Betracht kommenden Randbedingungen für stetigen Verbund samt ausführlichen Literaturnachweis wurde von E. Chwalla gegeben.⁴

Zum Unterschied gegenüber diesen bekannten Lösungen liegt bei der in Abb. 1 dargestellten Konstruktion, in welcher Stahlträger und Betonplatte in einzelnen Punkten durch aufgeschweißte Schrägeisen miteinander verbunden sind, der Fall

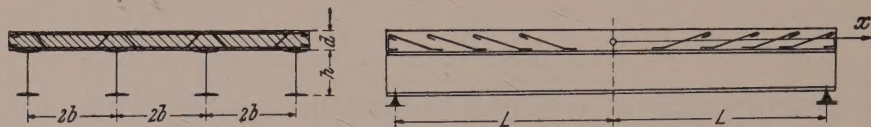


Abb. 1.

des unstetigen Verbundes zweier Teile mit verschiedenen Werkstoffeigenschaften vor. Die weitere Untersuchung erstreckt sich gemäß Abb. 2 auf einen mittleren Stahlträger mit dem Trägheitsmoment J_e , der Fläche F_e , dem Elastizitätsmodul E_e und auf die zugehörige Betongurtplatte mit den entsprechenden Werten J_b , F_b , E_b , die durch Schrägeisen mit der Querschnittsfläche f_e miteinander verbunden sind.

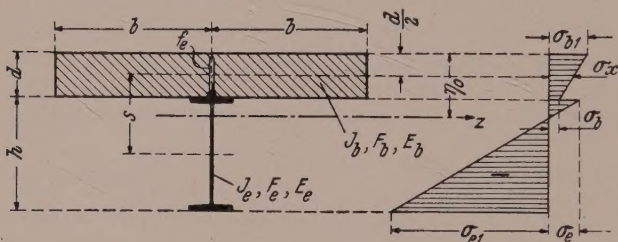


Abb. 2.

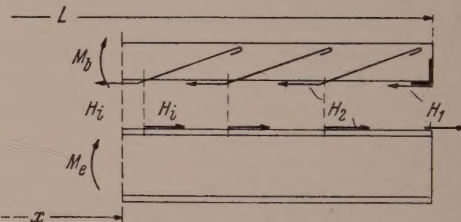


Abb. 3.

Dieser Verbundbalken wird durch ein Biegemoment M_x beansprucht. Bezeichnet man mit M_e bzw. $M_b = M_x - M_e$ die Momentenanteile, welche vom Träger bzw. von der Platte auf Grund der eigenen Biegesteifigkeit aufgenommen werden, so besteht zwischen diesen beiden Größen die Beziehung

$$\frac{M_e}{E_e J_e} = \frac{M_b}{E_b J_b}. \quad (1)$$

Denkt man sich Träger und Platte durch einen waagrechten Schnitt gemäß Abb. 3 getrennt, so erhält man an den Verbundstellen die Haftkräfte H , welche im Querschnitt x in der Platte die Druckkraft (Gurtkraft)

$$G_x = \sum_1^i H \quad (2)$$

und im Stahlträger eine Zugkraft gleicher Größe hervorrufen. Diese Gurtkraft vermindert das äußere Biegemoment M_x um den Betrag $(G_x \cdot s)$, wenn $s = 1/2 (h + d)$ den Abstand der Schwerpunkte von Platte und Träger bedeutet (Abb. 2). Die Gleichgewichtsbedingung lautet daher

$$M_x - G_x s = M_e + M_b. \quad (3)$$

⁴ E. Chwalla: Die Formeln zur Berechnung der „voll mittragenden Breite“ dünner Gurt- und Rippenplatten. Stahlbau (1936).

Mit den Widerstandsmomenten

$$W_e = \frac{2J_e}{h}, \quad W_b = \frac{2J_b}{d} = \frac{1}{3} b d^3 \quad (4)$$

der beiden Einzelteile und den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= W_e \left(1 + \frac{J_b}{n_0 J_e} \right), & n_0 &= \frac{E_e}{E_b}, \\ s_0 &= s + \frac{W_0}{F_e} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

erhält man entsprechend der Spannungsverteilung in Abb. 2 die dort eingetragenen Randspannungen des Stahlträgers

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \frac{M_e}{W_e} - \frac{G_x}{F_e} = \frac{1}{W_0} (M_x - G_x s_0), \\ \sigma_{e1} &= -\frac{M_e}{W_e} - \frac{G_x}{F_e} = -\sigma_e - \frac{2G_x}{F_e}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wobei Druckspannungen positiv bezeichnet werden. Die Randspannungen in der Betonplatte ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= \sigma_x - \frac{M_b}{W_b} = \sigma_x - \frac{(M_x - G_x s) d}{n_0 W_0 h}, \\ \sigma_{b1} &= \sigma_x + \frac{M_b}{W_b} = \sigma_x + \frac{(M_x - G_x s) d}{n_0 W_0 h}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hierbei bedeutet σ_x die Gurtspannung in der Mittelfaser gemäß Abb. 2, die mit der Gurtkraft durch die Beziehung

$$G_x = 2d \int_0^b \sigma_x dy \quad (8)$$

verknüpft ist.

II. Die Beanspruchung der Platte als ebenes Problem.

1. Die Lastfunktion.

Die Übertragung der Haftkräfte H_i in die Betonplatte erfolgt durch den Gleitwiderstand der Stahleinlagen, das Verteilungsgesetz der Schubspannungen entspricht daher der Belastung der Platte. Eine einfache Lösung für diese Schubspannungsverteilung gelingt unter der Annahme eines einachsigen Spannungszustandes⁵ und eines linearen Zusammenhanges zwischen Verschiebung und Schubspannung; diese linearisierte Theorie führt allerdings an den Enden der Stahleinlage zu einem Widerspruch, weil dort zwar die Verschiebungen Größtwerte erreichen, gleichzeitig aber die Schubspannungen verschwinden müssen. Die Randbedingungen für die Haftspannungsverteilung können bei ähnlich gelagerten Aufgaben des Stahlbaues durch einen erweiterten Ansatz zwischen Verschiebung und Schubspannung erfüllt werden,⁶ doch sind auch derartige Lösungen einigermaßen willkürlich, durch Versuche

⁵ I. Arnovlevič: Das Verteilungsgesetz der Haftspannung bei axial beanspruchten Verbundstäben. Z. Architektur u. Ingenieurwes. Hannover (1909).

⁶ K. Jäger: Die durch eine Achsialkraft beanspruchte Flankenschweißung als ebenes Spannungsproblem. Elektroschweiß. (1939). — O. Domke: Zur Theorie der Spannungsverteilung in Flankenschweißnähten. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, H. 6. Berlin: Springer-Verlag. 1943.

nicht bestätigt und können hier nicht übernommen werden. Zu einer ungezwungenen und rationellen Annahme über das Verteilungsgesetz der Schubspannungen führt die Lösung des in Abb. 4 dargestellten Scheibenproblems. Aus der gesamten Betonplatte (Abb. 1) wird ein Streifen von der Länge l des eingebetteten Rundstahles

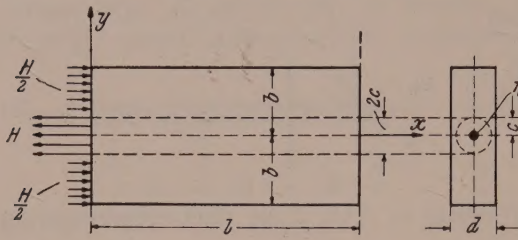


Abb. 4.

vom Querschnitt f_e herausgeschnitten gedacht; an Stelle des Rundstahlquerschnittes wird der statisch gleichwertige n_0 -fache Betonquerschnitt angenommen und dessen Durchmesser als Verteilungsbreite $2c$ für die einzuleitende Haftkraft H gewählt

$$c = \sqrt{\frac{n_0 f_e}{\pi}}. \quad (9)$$

Durch das in Abb. 4 angegebene Gleichgewichtssystem äußerer Kräfte wird im betrachteten Teil der Gurtplatte von der Breite $2b$ ein ebener Spannungszustand mit den Spannungskomponenten σ_x (Längsspannung), σ_y (Querspannung) und τ (Schubspannung) hervorgerufen, die den Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

unterliegen. Unter der Annahme des Hookeschen Gesetzes ergeben sich die Verzerrungskomponenten

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau. \quad (11)$$

Zwischen den Verschiebungskomponenten u und v eines Punktes in Richtung x bzw. y und den Verzerrungskomponenten bestehen die Beziehungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (12)$$

Die letzte dieser Gleichungen führt unter Beachtung von (10) und (11) zur sog. Verträglichkeitsbedingung des ebenen Spannungszustandes

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = 0. \quad (13)$$

Entwickelt man nun das Lastsystem der Abb. 4 in eine Fourier-Reihe mit der Periode $2b$, so erhält man den nachfolgenden Ansatz für die Spannungskomponenten

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Hb}{\pi d c (b-c)} \sum_n \frac{\sin \beta c}{n} \{ (A + B \beta x) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta x + (C + D \beta x) \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \beta x \} \cos \beta y, \\ \sigma_y &= \frac{Hb}{\pi d c (b-c)} \sum_n \frac{\sin \beta c}{n} \{ (A + 2D + B \beta x) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta x + (C + 2B + D \beta x) \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \beta x \} \cos \beta y, \\ \tau &= \frac{Hb}{\pi d c (b-c)} \sum_n \frac{\sin \beta c}{n} \{ (B + C + D \beta x) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta x + (A + D + B \beta x) \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \beta x \} \sin \beta y, \\ \beta &= \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

welcher die Gl. (10) und (13) befriedigt, wobei wieder Druckspannungen positiv bezeichnet werden. Da die Entfernung zwischen zwei benachbarten Stahlträgern un-

veränderlich bleibt, muß die Verschiebung v an den beiden Rändern $y = \pm b$ verschwinden, was durch den Ansatz (14) bereits erfüllt wird; an diesen Rändern verschwinden ordnungsgemäß auch die Schubspannungen. Am Rand $x = 0$ müssen die Längsspannungen σ_x der äußeren Belastung entsprechen und die Schubspannungen verschwinden, am Rand $x = l$ sind weder Normalspannungen σ_x noch Schubspannungen τ vorhanden. Diesen letzten vier Bedingungen entsprechen die Reihenoeffizienten

$$A = 1, \quad B = -C = \frac{(\sin \beta l \cos \beta l + \beta l)}{(\sin^2 \beta l - \beta^2 l^2)},$$

$$D = -\frac{\sin^2 \beta l}{(\sin^2 \beta l - \beta^2 l^2)}.$$
(15)

Die Verteilung der Schubspannungen längs der strichlierten Geraden $y = \pm c$ entspricht nun dem „Haftspannungsgesetz“ zwischen den beiden benachbarten Scheibenbereichen und ergibt sich aus Gl. (14) und (15) zu

$$\tau_c = -\frac{Hb}{\pi d c (b-c)} \sum_n \frac{\sin^2 \beta c}{n (\sin^2 \beta l - \beta^2 l^2)} \{ \beta^2 l^2 \sin \beta x + \beta x [\sin^2 \beta l \cos \beta x - (\sin \beta l \cos \beta l + \beta l) \sin \beta x] \}.$$
(16)

Die obige Reihe kann für den Normalfall $l \geq b/2$ auch in der für die Auswertung bequemer Form mit ausreichender Genauigkeit dargestellt werden

$$\tau_c \doteq -\frac{Hb}{\pi d c (b-c)} \sum_n \frac{1}{n} \sin^2 \beta c \{ \beta x (e^{-\beta x} - e^{-\beta l}) \}.$$
(16a)

In Abb. 5 ist das Ergebnis der Auswertung der Gl. (16) für $c/b = 0.1, 0.2$ und 0.5 eingetragen, wobei $l/b = 1$ angenommen wurde. Die Ungleichmäßigkeit der Schubspannungsverteilung wächst mit abnehmender Verteilungsbreite c , der Größtwert τ_{\max} tritt bei kleinen c -Werten in unmittelbarer Nähe des Krafteintragungsortes $x = 0$ auf, und dieses Verteilungsgesetz entspricht grundsätzlich den Versuchserfahrungen.⁷

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen wird an Stelle der Fourier-Reihe (16) das Verteilungsgesetz

$$\tau_0 = -\frac{H}{2d} \omega^2 x e^{-\omega x}, \quad \omega = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\pi}{n_0 f_e}} \quad (17)$$

gewählt, welches der Form der Reihenglieder der Gl. (16a) angepaßt ist, mit dem Parameter ω praktisch denselben Spannungsgrößtwert wie Gl. (16) ergibt und für den Normalfall $l/c > \pi$ an der Stelle $x = l$ nahezu auf Null abklingt.

2. Spannungszustand innerhalb des Lastbereiches.

Die Untersuchung des Spannungszustandes in einem Plattenstreifen von der Breite $2b$ und der Länge $2L$ (Abb. 6) wird unter der Voraussetzung durchgeführt, daß der Verbundträger symmetrisch belastet ist und alle Haftstellen symmetrisch zur Trägermitte angeordnet sind. Dann sind auch die Haftkräfte H zweier im Abstände t von der Trägermitte gelegener Haftstellen gleich groß und der Spannungszustand ist symmetrisch bezüglich der Trägermitte. Man denkt sich nun diesen Plattenstreifen längs der x -Achse aufgeschnitten und an den Schnittflächen innerhalb des

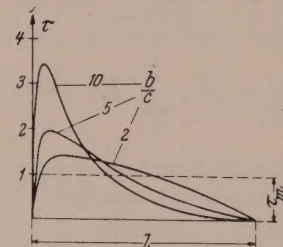


Abb. 5.

⁷ Vgl. R. Saliger: Der Eisenbeton, 6. Aufl. Leipzig: A. Kröner. 1933.

Lastbereiches $0 \leq \xi \leq l$ die Schubspannungen τ_0 der Lastfunktion (17) als äußere Belastung angebracht. Der hierdurch innerhalb des Lastbereiches bewirkte Spannungszustand muß folgende Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0, \pm b & \dots\dots\dots v' = 0, \\ \eta = \pm b & \dots\dots\dots \tau' = 0, \\ \eta = 0 & \dots\dots\dots \tau' = \tau_0, \\ \xi = 0, l & \dots\dots\dots \tau' = 0, \\ \xi = l & \dots\dots\dots \sigma_{\xi}' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die beiden ersten Bedingungen besagen, daß die Ränder $\eta = 0, \pm b$ gerade bleiben müssen und die Breite $2b$ des Streifens wegen des unverschieblichen Zusammenhanges mit den benachbarten Streifen unverändert bleibt. An den Längsrändern

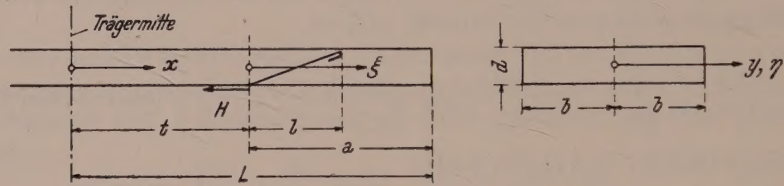


Abb. 6.

$\eta = \pm b$ dürfen keine Schubspannungen auftreten (3. Bedingung), die 4. Bedingung entspricht dem Belastungsgesetz (Haftspannungen). Die beiden Stirnflächen des Bereiches müssen frei von Schubspannungen (5. und 6. Bedingung) sein und auf der äußeren Stirnfläche dürfen keine Normalspannungen auftreten (7. Bedingung). Allen Anforderungen wird durch den nachfolgenden Ansatz von Fourier-Reihen entsprochen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}' &= -\frac{H}{2dl} \sum_m^{\infty} K_m \cos \alpha \xi \{ (1 + D_1 + B_1 \alpha \eta) \sin \alpha \eta + (B_1 + C_1 + D_1 \alpha \eta) \cos \alpha \eta \}, \\ \sigma_{\eta}' &= \frac{H}{2dl} \sum_m^{\infty} K_m \cos \alpha \xi \{ (1 - D_1 + B_1 \alpha \eta) \sin \alpha \eta + (C_1 - B_1 + D_1 \alpha \eta) \cos \alpha \eta \}, \\ \tau' &= -\frac{H}{2dl} \sum_m^{\infty} K_m \sin \alpha \xi \{ (1 + B_1 \alpha \eta) \cos \alpha \eta + (C_1 + D_1 \alpha \eta) \sin \alpha \eta \}, \\ \alpha &= \frac{m\pi}{2l}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Die Reihenkoeffizienten haben wegen der ersten drei Bedingungen (18) die Form

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2} (1 + \mu) \operatorname{ctg} \alpha b, \\ C_1 &= -\operatorname{ctg} \alpha b + \frac{(1 + \mu) \alpha b}{2 \sin^2 \alpha b}, \\ D_1 &= \frac{1}{2} (1 + \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

Die Schubspannung in der Faser $\eta = 0$ muß gleich der Lastfunktion sein:

$$\tau'_{\eta=0} = -\frac{H}{2dl} \sum_m^{\infty} K_m \sin \alpha \xi = \tau_0 = -\frac{H}{2d} \omega^2 \xi e^{-\omega \xi}. \quad (21)$$

Zur Bestimmung des Koeffizienten K_m muß die Lastfunktion (17) in eine Fourier-Reihe mit der Periode $4l$ entwickelt werden. Da $l/c = \omega l > \pi$ vorauszusetzen ist

(Normalfall), können die sehr kleinen Glieder mit $e^{-\omega l}$ vernachlässigt werden und man erhält dann

$$K_m = \frac{2}{l} \int_0^l \tau_0 \sin \alpha \xi d\xi = \frac{4 (\alpha l) (\omega l)^3}{[(\alpha l)^2 + (\omega l)^2]^2}. \quad (22)$$

Da nun der Lastbereich mit dem mittleren Teil $0 \leq x \leq l$ und dem Endteil $(a-l) \leq \xi \leq a$ der Gurtplatte zusammenhängt, ist zur Erfüllung der zwischen benachbarten Bereichen vorhandenen Übergangsbedingungen dem primären Spannungszustand (19) noch ein sekundärer Spannungszustand zu überlagern, der folgenden Anforderungen genügen muß:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0, \pm b \dots\dots\dots v'' = 0, \\ \eta &= 0, \pm b \dots\dots\dots \tau'' = 0, \\ \xi &= a, \dots\dots\dots \tau'' = \sigma_\xi'' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die drei ersten Bedingungen entsprechen den drei ersten Gl. (18) und wurden bereits begründet, die 4. Bedingung besagt, daß an der äußeren Belastung durch Hinzufügung des sekundären Spannungszustandes nichts geändert wird, die 5. und 6. Bedingung bringt zum Ausdruck, daß die Gurtplatte am Trägerende spannungsfrei ist. Zur Erfüllung der Übergangsbedingungen im Querschnitt $\xi = 0$ entsteht die Notwendigkeit der Addition von Spannungs- und Verschiebungskomponenten des primären und sekundären Zustandes in jeder Faser η , d. h. die Spannungskomponenten (19) müssen dort in eine Reihe in Richtung entwickelt werden. Der sekundäre Spannungszustand ist daher nur durch eine Fouriersche Doppelreihe darstellbar:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi'' &= \frac{H}{b d} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta \eta \{ -C \beta (a - \xi) \mathfrak{C} \mathfrak{o} \beta (a - \xi) + [C + D \beta (a - \xi)] \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta (a - \xi) \}, \\ \sigma_\eta'' &= -\frac{H}{b d} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta \eta \{ [2 D - C \beta (a - \xi)] \mathfrak{C} \mathfrak{o} \beta (a - \xi) + \\ &\quad + [-C + D \beta (a - \xi)] \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta (a - \xi) \}, \\ \tau'' &= \frac{H}{b d} \sum_m \sum_n \Phi \sin \beta \eta \{ D \beta (a - \xi) \mathfrak{C} \mathfrak{o} \beta (a - \xi) + [D - C \beta (a - \xi)] \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta (a - \xi) \}, \\ \beta &= \frac{n \pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Die obigen Spannungskomponenten erfüllen alle Randbedingungen (23), der Faktor Φ wird mit Rücksicht auf die spätere Reihenentwicklung des primären Spannungszustandes an der Stelle $\xi = 0$ hinzugefügt und ist durch Gl. (27) gegeben. Da die Komponenten σ_ξ' und τ' des primären Zustandes für $\xi = l$ gemäß Gl. (18) verschwinden, so ist der endgültige Spannungszustand innerhalb des ganzen Bereiches $0 \leq \xi \leq a$, also bis zum freien Endquerschnitt der Gurtplatte durch

$$\sigma_\xi = \sigma_\xi' + \sigma_\xi'', \quad \sigma_\eta = \sigma_\eta' + \sigma_\eta'', \quad \tau = \tau' + \tau'' \quad (25)$$

bestimmt.

Im Übergangsquerschnitt $\xi = 0$ zum Mittelteil der Platte müssen die Spannungs- und Verschiebungskomponenten der aneinandergrenzenden Bereiche gleich groß sein, d. h. es muß dort die Summe gemäß (25) gebildet werden. Die Spannungskomponenten des primären Zustandes müssen daher wegen (24) dort durch eine Doppelreihe dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi' (\xi = 0) &= \frac{H}{2 b d} + \frac{H}{b d} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta \eta, \\ \sigma_\eta' (\xi = 0) &= \frac{\mu H}{2 b d} - \frac{H}{b d} \sum_m \sum_n \Psi \cos \beta \eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Reihenkoeffizienten erhält man in bekannter Weise unter Verwendung der Gl. (19) zu

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{2}{b} \int_0^b \sigma_{\xi}'(\xi=0) \cos \beta \eta \, d\eta = \frac{\alpha l [(\alpha l)^2 + (2 + \mu)(\beta l)^2]}{[(\alpha l)^2 + (\beta l)^2]^2} K_m, \\ \Psi &= \frac{2}{b} \int_0^b \sigma_{\eta}'(\xi=0) \cos \beta \eta \, d\eta = \frac{\alpha l [(\beta l)^2 - \mu(\alpha l)^2]}{[(\alpha l)^2 + (\beta l)^2]^2} K_m.\end{aligned}\quad (27)$$

Die resultierenden Spannungskomponenten im Querschnitt $\xi = 0$ ergeben sich aus (24) und (27) gemäß Gl. (25):

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi}(\xi=0) &= \frac{H}{2bd} + \frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta \eta \{1 - C \beta a \mathfrak{Cof} \beta a + (C + D \beta a) \mathfrak{Sin} \beta a\}, \\ \sigma_{\eta}(\xi=0) &= \frac{\mu H}{2bd} - \frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta \eta \left\{ \frac{\Psi}{\Phi} + (2D - C \beta a) \mathfrak{Cof} \beta a - (C - D \beta a) \mathfrak{Sin} \beta a \right\}, \\ \tau_{\xi\eta}(\xi=0) &= \frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \Phi \sin \beta \eta \{D \beta a \mathfrak{Cof} \beta a + (D - C \beta a) \mathfrak{Sin} \beta a\}.\end{aligned}\quad (28)$$

Schließlich erhält man die Verschiebung u an der Stelle $\xi = 0$ aus

$$\begin{aligned}E_b u_{\xi=0} &= \frac{H(1-\mu^2)t}{2bd} + \frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \frac{\Phi}{\beta} \cos \beta \eta \{[(1-\mu)D + (1+\mu)\beta a C] \mathfrak{Sin} \beta a - \\ &\quad - [2C + (1+\mu)\beta a D] \mathfrak{Cof} \beta a\}.\end{aligned}\quad (29)$$

Das erste Glied in der obigen Gleichung wird als Konstante mit Rücksicht auf die Verschiebung im Mittelteil der Platte hinzugefügt.

3. Spannungszustand im Mittelteil $0 \leq x \leq t$.

Der Spannungszustand im Mittelteil der Platte (Abb. 6) ist symmetrisch bezüglich der Trägermitte $x = 0$ und unterliegt den ersten vier Randbedingungen (23), nach welchen die Verschiebung v und die Schubspannung τ in der Faser $y = 0$ und an den beiden Rändern $y = \pm b$ verschwinden muß. Die Spannungskomponenten haben mit Rücksicht auf (24) ebenfalls die Form einer Fourierschen Doppelreihe:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{H}{2bd} + \frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta y \{R \mathfrak{Cof} \beta x + S \beta x \mathfrak{Sin} \beta x\}, \\ \sigma_y &= \frac{\mu H}{2bd} - \frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \Phi \cos \beta y \{(R + 2S) \mathfrak{Cof} \beta x + S \beta x \mathfrak{Sin} \beta x\}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{H}{bd} \sum_m \sum_n \Phi \sin \beta y \{(R + S) \mathfrak{Sin} \beta x + S \beta x \mathfrak{Cof} \beta x\}.\end{aligned}\quad (30)$$

Der Multiplikator Φ entspricht der Gl. (27), die beiden anderen Koeffizienten R und S sind aus den Übergangsbedingungen zu bestimmen. An der Grenze $x = t$ des Bereiches erhält man folgende Spannungswerte:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(x=t)} &= \frac{H}{2bd} + \frac{H}{bd} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi \cos \beta y \{ R \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta t + S \beta t \mathfrak{S} \text{in} \beta t \}, \\
\sigma_{y(x=t)} &= \frac{\mu H}{2bd} - \frac{H}{bd} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi \cos \beta y \{ (R + 2S) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta t + S \beta t \mathfrak{S} \text{in} \beta t \}, \\
\tau_{xy(x=t)} &= -\frac{H}{bd} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi \sin \beta y \{ (R + S) \mathfrak{S} \text{in} \beta t + S \beta t \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta t \}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Die Verschiebung u ist aus Gl. (30) zu ermitteln und ist für $x = t$ aus

$$\begin{aligned}
E_b u_{(x=t)} &= \frac{H(1-\mu^2)t}{2bd} + \frac{H}{bd} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \frac{\Phi}{\beta} \cos \beta y \{ [(1+\mu)R - (1-\mu)S] \mathfrak{S} \text{in} \beta t + \\
&\quad + (1+\mu)S \beta t \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta t \}
\end{aligned} \tag{32}$$

zu entnehmen.

4. Koeffizientenbestimmung, Spannungsgrößtwerte.

Die Spannungsansätze der beiden Teilbereiche der Scheibe enthalten noch die Reihenkoeffizienten C , D , R und S , die gerade zur Erfüllung der Bedingungen im gemeinsamen Querschnitt $\xi = 0$, $x = t$ erforderlich sind. Diese Übergangsbedingungen enthalten die Forderung, daß die im Grenzquerschnitt direkt übertragenen Längs- und Schubspannungen in jeder Faser y bzw. η gleich groß sein müssen und daß ferner die Komponenten u , v des Verschiebungsweges in jedem Punkt übereinstimmen; diese Bedingungen können auch in der Form

$$\begin{aligned}
\xi = 0, \quad x = t \quad \dots \quad \sigma_\xi = \sigma_x, \quad \tau_{\xi\eta} = \tau_{xy}, \\
\sigma_\eta = \sigma_y, \quad u_\xi = u_x
\end{aligned} \tag{32}$$

angeschrieben werden und sind unter Heranziehung der Gl. (28) und (31) dann befriedigt, wenn ihnen die einzelnen Glieder der Doppelreihe genügen, wobei $\eta = y$ zu setzen ist. Man erhält dann gemäß Gl. (32) vier lineare, nichthomogene Gleichungen für die Reihenkoeffizienten. Für $\beta a > \pi$ und $\beta b > \pi$ — diese Voraussetzung trifft bei den üblichen Abmessungsverhältnissen mindestens für alle Reihenglieder mit $n > 2$ zu — lassen sich diese Gleichungen vereinfachen ($\mathfrak{S} \text{in} \beta a \doteq \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta a$) und man erhält dann

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{4 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta t} \left[\left(\frac{\Psi}{\Phi} - 1 \right) \beta t - 2 \right], \\
S &= \frac{1}{4 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta t} \left(\frac{\Psi}{\Phi} - 1 \right), \\
C &= \frac{1}{4 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta a} \left[\left(\frac{\Psi}{\Phi} - 1 \right) \beta a - 2 \right], \\
D &= -\frac{1}{4 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \beta a} \left[\left(\frac{\Psi}{\Phi} - 1 \right) (1 - \beta a) + 2 \right].
\end{aligned} \tag{33}$$

Durch diese Reihenkoeffizienten, in welchen Φ und Ψ nach Gl. (27) einzuführen ist und β die Bedeutung gemäß Gl. (24) hat, ist der Spannungszustand innerhalb der ganzen Gurtplatte festgelegt. Die größten Normalspannungen treten im Querschnitt $x = t$ auf, ihre Verteilung ist durch die beiden ersten Gl. (31) in Verbindung mit (33) bestimmt:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(x=t)} &= \frac{H}{2bd} \left(1 + \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi \cos \frac{n\pi y}{b} \right), \\
\sigma_{y(x=t)} &= \frac{H}{2bd} \left(\mu - \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Psi \cos \frac{n\pi y}{b} \right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Die größte Schubspannung in der Platte tritt gemäß Abb. 5 und Gl. (17) im Abstände $\xi_0 = 1/\omega = c$ von diesem Querschnitt auf und beträgt

$$\max \tau_0 = -\frac{H}{2dl} \left(\frac{\omega l}{e} \right) \doteq -0.37 \tau_m \left(\frac{l}{c} \right) = -0.37 \sigma_0 \left(\frac{b}{c} \right), \quad (35)$$

wobei τ_m die auf die Schnittfläche ($d \cdot l$) gleichmäßig verteilte, mittlere Haftspannung bedeutet und c aus Gl. (9) einzuführen ist, während $\sigma_0 = H/2bd$ der mittleren Normalspannung an der Stelle $x = t$ entspricht. Die Höchstwerte der Normalspannungen ergeben sich gemäß Gl. (34) in der Faser $y = 0$. Die zahlenmäßige Auswertung der Doppelsummen ist mühsam, weil die Reihen in der Umgebung von $y = 0$ schlecht konvergieren. Es kann jedoch gezeigt werden, daß die Doppelsummen unter Beachtung der praktisch vorkommenden Abmessungsverhältnisse vereinfacht und dann in geschlossener Form dargestellt werden können. Zu diesem Zwecke bedient man sich der ersten Gl. (19), die für $\xi = 0$, $\eta = 0$ identisch ist mit der ersten Gl. (26):

$$-\frac{H}{2dl} \sum_m^\infty K_m (B_1 + C_1) - \frac{H}{2bd} \left(1 + 2 \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi \right). \quad (36)$$

Damit ist zunächst die Berechnung der Doppelsumme auf die Auswertung einer einfachen Reihe zurückgeführt, wobei die Koeffizienten B_1 und C_1 aus Gl. (20) einzusetzen sind. Für die in Frage kommenden Abmessungsverhältnisse gilt meist schon ab $m = 3$ (zweites Reihenglied) $\dots \alpha b > \pi$ und damit wird $B_1 \doteq -1/2(1 + \mu)$, $C_1 \doteq -1$ und man erhält also aus (36):

$$\sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi \doteq \frac{1}{4} (1 + \mu) \left(\frac{b}{l} \right) \sum_m^\infty K_m - \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Mittels der Eulerschen Summenformel kann nunmehr die einfache Reihe summiert werden, wobei die Restglieder als bedeutungslos klein weggelassen werden:

$$\sum_m^\infty K_m \doteq \frac{8\omega^3 l^3}{\pi(\pi^2 + 4\omega^2 l^2)} \left\{ 1 + \frac{2}{(\pi^2 + 4\omega^2 l^2)} \right\}. \quad (38)$$

Mit den gleichen Überlegungen kann aus der Identität der zweiten Gl. (24) für $\xi = 0$, $\eta = 0$ mit der zweiten Gl. (26) für $\eta = 0$ die Beziehung

$$\sum_m^\infty \sum_n^\infty \Psi \doteq \frac{1}{4} (1 - \mu) \left(\frac{b}{l} \right) \sum_m^\infty K_m + \frac{\mu}{2} \quad (39)$$

hergeleitet werden. Für $\omega l > \pi$ (trifft praktisch immer zu) ist weiterhin das zweite Glied in Gl. (38) klein gegenüber Eins und man erhält daher zusammenfassend für die beiden Doppelsummen die nachfolgenden geschlossenen Ausdrücke, wobei $\omega = 1/c$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Phi &\doteq \frac{(3 + \mu)}{2\pi} \left(\frac{b}{c} \right) - \frac{1}{2}, \\ \sum_m^\infty \sum_n^\infty \Psi &\doteq \frac{(1 - \mu)}{2\pi} \left(\frac{b}{c} \right) + \frac{\mu}{2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Gemäß Gl. (34) und (40) erhält man für $y = 0$ die Spannungsspitzen:

$$\begin{aligned} \max \sigma_x &= \frac{H}{2bd} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(3 + \mu)}{2\pi} \left(\frac{b}{c} \right) \right\} = \zeta_x \frac{H}{2bd} = \zeta_x \sigma_0, \\ \min \sigma_y &= \frac{H}{2bd} \left\{ \frac{\mu}{2} - \frac{(1 - \mu)}{2\pi} \left(\frac{b}{c} \right) \right\} = -\zeta_y \frac{H}{2bd} = -\zeta_y \sigma_0. \end{aligned} \quad (41)$$

Die Faktoren ζ_x bzw. ζ_y sind nur von der Breite der Gurtplatte und von c , d. h. vom Querschnitt f_e der Schrägeisen abhängig. Für den häufig vorkommenden Fall $b/c = 10$ und $\mu = 0$ (Beton für kleine Laststufen) würde man $\max \sigma_x = 5.3 \sigma_0$ (Druck) und $\min \sigma_y = -1.6 \sigma_0$ (Zug) erhalten; die Auswertung von Gl. (35) ergibt hier $\max \tau_0 = -3.7 \sigma_0$, also einen recht beachtlichen Schubspannungsgrößtwert, welcher im kleinen Abstände $c = 0.1 b$ vom Orte der Normalspannungsspitzen auftritt.

In Abb. 7 ist allgemein die Verteilung der Normalspannungen im gefährlichen Querschnitt $x = t$ dargestellt, aus welcher hervorgeht, daß die Zugbeanspruchung σ_y in der Mittelfaser $y = 0$ für $\mu = 0$ am größten wird.

Bei der Ermittlung der Spannungscomponenten in einem beliebigen Punkt der Gurtplatte ist allerdings die Auswertung einer Doppelsumme nicht zu umgehen. Diese umständlichen Zahlenrechnungen können jedoch im allgemeinen unterbleiben, weil Ort und Größe der Normalspannungsspitzen gemäß Gl. (41) bekannt ist und die Spannungsgrößtwerte nach dem Prinzip von de St. Venant mit wachsender Ent-

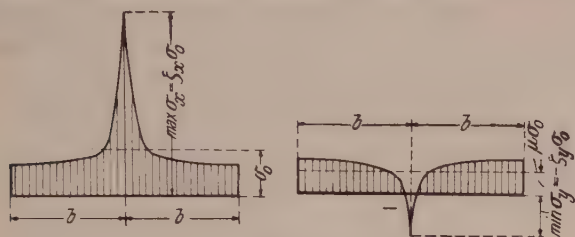


Abb. 7.

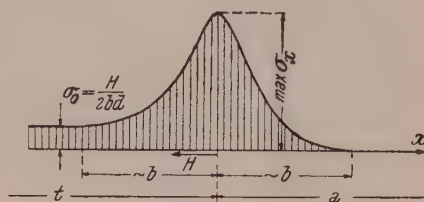


Abb. 8.

fernung vom Querschnitt $x = t$ rasch abklingen; so findet man die Verteilung der Längsspannung σ_x für $y = 0$ gemäß Abb. 8, welche schon etwa in der Entfernung b vom Lastangriffsort $x = t$ gegen den Mittelteil der Platte bereits auf die Durchschnittpannung σ_0 und gegen den Endteil (Richtung gegen das Auflager) der Platte auf Null absinkt. Von dieser Verteilung der Längsspannungen wird bei der Berechnung der Verschiebung u mit Vorteil Gebrauch gemacht.

III. Berechnung der Haftkräfte.

An den einzelnen Haftstellen ist die Betonplatte mit dem Stahlträger fest verbunden, wenn die unbedeutende Längenänderung der kurzen Schweißstellen unberücksichtigt bleibt. Zufolge dieses Verbundes besteht zwischen den Formänderungen dieser beiden Trägereile eine geometrische Beziehung, aus welcher die Größe der einzelnen Haftkräfte zu berechnen ist. Diese Untersuchung soll wegen des erforderlichen Vergleiches unter Berücksichtigung des wirklichen Verzerrungszustandes, ferner unter Zugrundelegung der mittleren Formänderungen und schließlich nach der üblichen Berechnungsweise (stetiger Verbund ohne Spannungserhöhung) durchgeführt werden.

1. Genaues Verfahren.

Es wird ein symmetrisch ausgebildeter Verbundbalken vorausgesetzt, der r Haftstellen pro Trägerhälfte besitzt und symmetrisch belastet ist (Bezeichnungen gemäß Abb. 9). Der Abstand l_i zweier benachbarter Haftstellen (i) und ($i + 1$) erfährt eine Längenänderung, die für Gurtplatte und Stahlträger gleich groß sein muß. Bei r Haftstellen sind ebenso viele geometrische Bedingungen

$$\int_{-l_i}^{+l_i} (\epsilon_b - \epsilon_s)_{y=0} dx = 0 \quad (42)$$

anzuschreiben, wobei sich die r -te Gleichung auf den Abstand l_r der Haftstelle r von der Trägermitte bezieht (Abb. 9). Die in Gl. (42) vorhandenen Längenänderungen treten auf der Unterseite der Gurtplatte (ε_b) bzw. auf der Oberseite des Stahlträgers (ε_s) auf und sind unter der Annahme des Hookeschen Gesetzes aus den entsprechenden Gl. (6) und (7) zu bestimmen; hierbei wird für die Betonplatte $\mu = 0$ gesetzt und die Längenänderung des Stahlträgers aus seiner gleichmäßig über den Oberflansch verteilten Biegespannung σ_s berechnet. Unter Verwendung der Gl. (6), (7) und (2) lautet die geometrische Bedingung für den Zwischenraum (i):

$$E_b \int_{-l_i}^{l_i} (\varepsilon_x)_{y=0} dx + \frac{(s d + s_0 h)}{W_0 n_0 h} \sum_1^i H - \frac{(h + d)}{W_0 n_0 h} \int_{-l_i}^{l_i} M_x dx = 0. \quad (43)$$

Die Längenänderung ε_x in der Mittelfaser $y = 0$ der Gurtplatte hängt von der mittleren Stauchung ε_{xm} und der durch die Spannungserhöhung an den Haftstellen (i) und ($i + 1$) bewirkten zusätzlichen Stauchung ε'_x ab, die durch die Ziffern ζ_i bzw. ζ_{i+1} entsprechend der ersten Gl. (41) bestimmt ist. Die mittlere Gurtstauchung ist für $\mu = 0$ durch

$$\varepsilon_{xm} = \frac{G_w}{2 b d E_b} = \frac{1}{2 b d E_b} \sum_1^i H \quad (44)$$

gegeben. Nimmt man mit Bezug auf das in Abb. 8 angedeutete Abklingungsgesetz mit ausreichender

Genauigkeit an, daß die Längsspannung σ_x von ihrem Höchstwert $\max \sigma_x = \zeta \sigma_x$ nach beiden Seiten parabolisch abfällt und im Abstande b von der Haftstelle die Durchschnittsspannung σ_0 bzw. den Wert Null erreicht, so läßt sich die gesamte zusätzliche Längenänderung im Zwischenraum (i) für $l \leq b$ in der Form

$$E_b \int_{-l_i}^{l_i} \varepsilon'_x dx = \frac{1}{2 b d} [H_i (\zeta_i - 1) + H_{i+1} \zeta_{i+1}] \frac{b}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{b}{l} \right)^3 \right] \quad (45)$$

schreiben; für den seltenen Fall $l > b$ wäre in der obigen Gleichung $l = b$ zu setzen. Man erhält daher aus Gl. (43), (44) und (45)

$$E_b \int_{-l_i}^{l_i} \varepsilon_x dx = E_b \int_{-l_i}^{l_i} (\varepsilon_{xm} + \varepsilon'_x) dx = \frac{l_i}{2 b d} \left\{ \sum_1^i H + \frac{1}{3} [H_i (\zeta_i - 1) + H_{i+1} \zeta_{i+1}] \left[1 - \left(1 - \frac{b}{l} \right)^3 \right] \frac{b}{l_i} \right\}. \quad (46)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{2(s d + s_0 h) b d}{W_0 n_0 h} + 1, \\ K_2 &= \frac{2(h + d) b d}{W_0 n_0 h}, \\ \kappa_i &= \frac{1}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{b}{l_i} \right)^3 \right] \frac{b}{l_i} (\zeta_i - 1), \\ \kappa'_i &= \frac{1}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{b}{l_i} \right)^3 \right] \frac{b}{l_i} \zeta_{i+1}, \\ \zeta_i &= \frac{1}{2} \left(1 + 0.45 \frac{b}{\sqrt{f_{ei}}} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

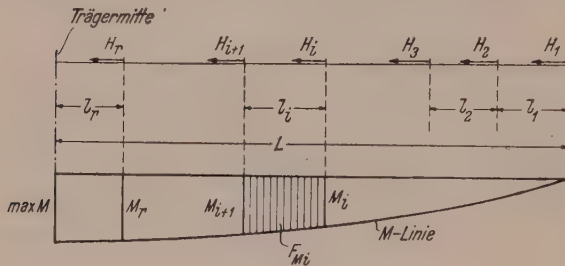


Abb. 9.

so lautet die geometrische Bedingung für den Zwischenraum (i)

$$K_1 \sum_1^i H + \kappa_i H_i + \kappa_i' H_{i+1} = \frac{K_2}{l_i} \int_0^{l_i} M_x dx = \frac{K_2}{l_i} F_{Mi}. \quad (48)$$

Das Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichung entspricht der Momentenfläche F_{Mi} im betrachteten Intervall (i) gemäß Abb. 9. Man erhält also bei r Haftstellen r lineare, nichthomogene Gleichungen vom Typus (48) zur Berechnung der r unbekannten Haftkräfte H_1 bis H_r , wobei für $i = r$ das dritte Glied auf der linken Seite der Gl. (48) wegfällt. Bei der Auswertung bildet man zweckmäßig durch Subtraktion zweier aufeinanderfolgender Gl. (48) ein neues System:

$$\begin{aligned} (K_1 + \kappa_1) H_1 + \kappa_1' H_2 &= K_2 \frac{F_{M1}}{l_1}, \\ -\kappa_1 H_1 + (K_1 + \kappa_2 - \kappa_1') H_2 + \kappa_2' H_3 &= K_2 \left(\frac{F_{M2}}{l_2} - \frac{F_{M1}}{l_1} \right), \\ -\kappa_2 H_2 + (K_1 + \kappa_3 - \kappa_2') H_3 + \kappa_3' H_4 &= K_2 \left(\frac{F_{M3}}{l_3} - \frac{F_{M2}}{l_2} \right), \\ -\kappa_3 H_3 + (K_1 + \kappa_4 - \kappa_3') H_4 + \kappa_4' H_5 &= K_2 \left(\frac{F_{M4}}{l_4} - \frac{F_{M3}}{l_3} \right), \\ &\vdots \\ -\kappa_{r-1} H_{r-1} + (K_1 + \kappa_r - \kappa_{r-1}') H_r &= K_2 \left(\frac{F_{Mr}}{l_r} - \frac{F_{M(r-1)}}{l_{r-1}} \right). \end{aligned} \quad (48a)$$

Die Beiwerte der Gl. (47) sind nur von den Querschnittsabmessungen abhängig, die durch eine Vorberechnung nach dem üblichen Verfahren (stetiger Verbund) zu bestimmen sind.

2. Berechnung aus den mittleren Formänderungen.

Das erste Glied auf der linken Seite der Gl. (48) entspricht der mittleren Längenänderung der Gurtplatte, also auch einer gleichmäßigen Verteilung der Längsspannungen σ_x über die Breite der Gurtplatte. Vernachlässigt man in erster Annäherung den Einfluß der Spannungserhöhung in der Mittelfaser $y = 0$, d. h. setzt man alle κ -Werte gleich Null, so erhält man die geometrische Bedingung im Intervall (i) aus Gl. (48) zu

$$K_1 \sum_1^i H = K_1 G_i = \frac{K_2}{l_i} \int_0^{l_i} M_x dx = \frac{K_2}{l_i} F_{Mi}. \quad (49)$$

Aus der Differenz zweier aufeinanderfolgender Gurtkräfte findet man schließlich die Haftkraft an der Haftstelle (i):

$$H_i = G_i - G_{i-1} = \frac{K_2}{K_1} \left(\frac{F_{Mi}}{l_i} - \frac{F_{M(i-1)}}{l_{i-1}} \right). \quad (50)$$

Die leicht zu bestimmenden Werte der Gl. (50) können als erste Näherungswerte des Gleichungssystems (48a) betrachtet werden.

3. Übliches Berechnungsverfahren.

Der übliche Spannungsnachweis im Verbundquerschnitt, Abb. 2, setzt eine stetige und unnachgiebige (starre) Verbindung zwischen Stahlträger und Betonplatte voraus. Mit den bisherigen Bezeichnungen erhält man den Abstand η_0 des gemeinsamen

Schwerpunktes beider Teile vom Druckrand und das Trägheitsmoment J_z bezüglich der Schwerachse zu

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \frac{F_b d + n_0 F_e (h + 2d)}{2(F_b + n_0 F_e)}, \\ J_z &= J_b + n_0 J_e + \frac{n_0 F_b F_e (h + d)^2}{4(F_b + n_0 F_e)}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Mit diesen Werten kann die Biegespannung in einer Faser im Abstände von der Nulllinie (z -Achse) in bekannter Weise berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^* &= \frac{M_x}{J_z} \eta \quad (\text{Beton}), \\ \sigma^* &= \frac{n_0 M_x}{J_z} \eta \quad (\text{Stahlträger}). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Die in der Faser η auftretende Schubkraft T pro Längeneinheit ergibt sich nach den Regeln der Festigkeitslehre zu

$$T = \frac{Q_x S_\eta}{J_z}, \quad (53)$$

wobei S_η das statische Moment des oberhalb η befindlichen Querschnittsteiles bezüglich der z -Achse bedeutet (Stahlquerschnitte sind n_0 -fach zu nehmen). Insbesondere beträgt die Schubkraft in der Berührungsfläche zwischen Platte und Stahlträger ($\eta = \eta_0 - d$):

$$T_b = \frac{Q_x S_b}{J_z}, \quad (54)$$

wobei

$$S_b = F_b \left(\eta_0 - \frac{d}{2} \right) = \frac{n_0 F_b F_e (h + d)}{2(F_b + n_0 F_e)}$$

bedeutet. Die Gurtkraft im Querschnitt x ist somit gemäß Gl. (8) und unter Beachtung des gewählten Koordinatensystems (Abb. 1 oder 6) für einen Träger auf zwei Stützen mit der Spannweite $2L$ durch

$$G_x = \int_{L_0}^x T_b dx = \int_{L_0}^x \frac{Q_x S_b}{J_z} dx = \frac{M_x S_b}{J_z} = M_x \frac{K_2}{K_1} \quad (55)$$

bestimmt. Die Gl. (50) geht für $l_i \rightarrow 0$ in die obige Gleichung über. Man erkennt also, daß der Unterschied zwischen den Berechnungsverfahren (2) und (3) mit wachsender Zahl r der Haftstellen rasch abnimmt. Beide Verfahren ergeben aber immer zu große Gurtkräfte, d. h. der Wirkungsgrad des Verbundes wird nach der üblichen Berechnungsmethode überschätzt. Die größte Gurtkraft als Summe aller Haftkräfte ist nach dem genauen Verfahren (1) immer kleiner als nach der üblichen Berechnung, der Unterschied sinkt aber auch hier rasch mit zunehmender Zahl der Haftstellen.

4. Die Beanspruchung des Verbundbalkens.

Man kann zeigen, daß die größte Beanspruchung des Stahlträgers auch bei geringerer Anzahl von Haftstellen nur unwesentlich höher ist als nach der üblichen Berechnung,⁸ so daß die hiervon abhängige Fließgefahr des Verbundbalkens durch die unstetige Einleitung der Haftkräfte kaum merklich beeinflusst wird; dies beweisen auch die mit derartigen Trägern durchgeführten Versuche.¹ Die größte Beanspruchung der Betonplatte ist abhängig von der Anzahl der Haftstellen, sie kann wegen

⁸ Eine eingehende Untersuchung wurde vom Verfasser anlässlich der Ausarbeitung eines Gutachtens durchgeführt, ihre Ergebnisse können im Rahmen dieses Aufsatzes nicht untergebracht werden und sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden.

der vielfältigen Einflüsse (Konstruktionsart des Verbundbalkens, Belastungsart usw.) in allgemeiner Form nur eingeschätzt werden. Ausgangspunkt für die Berechnung der Höchstspannungen bildet die nähere Betrachtung der Gl. (41) und (35), welche aber die Spannungsspitzen nur in Abhängigkeit von der Plattenbreite $2b$, von c bzw. vom Querschnitt f_e der Schrägeisen und von der örtlichen Haftkraft H angeben. Die zweite Gl. (41) zeigt z. B., daß die Querspannung σ_y örtlich eine Zugbeanspruchung hervorruft, deren Aufnahme allerdings durch die quer zu den Stahlträgern liegende Hauptbewehrung der Platte (Tragbewehrung) gesichert ist; es ist also in konstruktiver Hinsicht zu beachten, daß an jeder Haftstelle ein querliegendes Eisen der Hauptbewehrung verlegt wird. Die Anstrengung der Betonplatte ist somit durch die Hauptdruckspannung bestimmt, die unter der etwas zu ungünstigen Annahme ermittelt wird, daß die größte Schubspannung $\max \tau_0$ nach Gl. (35) ebenfalls an der Haftstelle zusammen mit den Normalspannungsgrößtwerten nach Gl. (41) auftritt. Man kann dann die örtliche Anstrengung der Platte an der Haftstelle (i) zu

$$\sigma_i \doteq \frac{H_i}{2bd} \left[0.5 + 0.65 \left(\frac{b}{c} \right) \right] \quad (56)$$

angeben. Der absolute Größtwert σ_x der Gurtplatte tritt an der der Trägermitte zunächst gelegenen Haftstelle r auf. Bezeichnet man mit $\sigma_{xm} = G_x/F_b$ die nach dem üblichen Verfahren bestimmte mittlere Gurtspannung, so ist der Quotient

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{xm}} = \zeta > 1, \quad (57)$$

der als Formziffer bezeichnet wird, weil ζ nur von der Ausführungsart des Verbundbalkens abhängig sein soll, maßgebend für die Festlegung der zulässigen Inanspruchnahme. Bei der Entwicklung eines Schätzwertes für diese Ziffer ζ sind alle bisherigen Ergebnisse zu berücksichtigen und auch normale Verhältnisse anzunehmen; so soll z. B. die Zahl r der Haftstellen eine gewisse untere Grenze (etwa $r > 5$) nicht unterschreiten und die Austeilung der Haftstellen wird so angenommen, daß die einzelnen Haftkräfte möglichst gleich groß sind. Unter diesen Voraussetzungen darf das Ausmaß der örtlichen Spannungserhöhung gemäß Gl. (57) — c bzw. f_e ist dann konstant — für sämtliche Haftstellen gleich groß angenommen werden und man erhält für die Formziffer eine obere Grenze in

$$\zeta = 1 + \frac{1}{r} \left(\frac{0.3b}{\sqrt{f_e}} - 0.5 \right) > 1. \quad (58)$$

In der obigen Gleichung bedeutet r die Zahl der Haftstellen pro Trägerhälfte, b die halbe Breite der Gurtplatte und f_e den Querschnitt der Stahleinlagen pro Haftstelle.

Bezeichnet man das Biegemoment an der Haftstelle r mit M_r (Abb. 9), so folgt die größte Anstrengung der Gurtplatte gemäß Gl. (7) angenähert zu

$$\max \sigma_{b1} \doteq \zeta \frac{G_r}{F_b} - \frac{(M_r - G_r s) d}{n_0 W_0 h}. \quad (59)$$

Setzt man hier die Gurtkraft nach Gl. (55) ein und beachtet Gl. (52), so läßt sich die obige Beziehung in

$$\begin{aligned} \max \sigma_{b1} &= \frac{M_r \eta_0}{J_z} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{d}{2\eta_0} \right) (\zeta - 1) \right\} = \sigma_{b1}^* \left\{ 1 + \left(1 - \frac{d}{2\eta_0} \right) (\zeta - 1) \right\}, \\ \sigma_{b1}^* &= \frac{M_r \eta_0}{J_z} \end{aligned} \quad (60)$$

transformieren, wobei σ_{b1}^* die nach dem üblichen Verfahren ausgewiesene Betonrandspannung bedeutet; nach Einführung von η_0 aus Gl. (51) erhält man schließlich die Bemessungsformel

$$\max \sigma_{b1} = \sigma_{b1}^* \left\{ 1 + \frac{n_0 F_e (h + d) (\zeta - 1)}{F_b d + n_0 F_e (h + 2d)} \right\} \leq \sigma_{bzul}. \quad (61)$$

Das Ausmaß der resultierenden Spannungserhöhung im gefährlichen Querschnitt r , also an der der Trägermitte zunächst gelegenen Haftstelle, kann nach Festlegung der konstruktiven Ausführung sofort berechnet werden; die Formziffer ζ nach Gl. (58) schwankt hierbei für die praktisch möglichen Ausführungsarten eines Balkens bestimmter Stützweite nur wenig, da einer erhöhten Zahl von Haftstellen (Vergrößerung von r) ein kleinerer Stahlquerschnitt f_e entspricht. Das Ausmaß der resultierenden Spannungserhöhung gemäß Gl. (61) ist mit etwa 40% der Grundspannung σ_{b1}^* zu veranschlagen. Die Gl. (61) tritt für die Bemessung an Stelle der bei stetigen Verbundproblemen üblichen Ermittlung der „mitttragenden Breite“, durch welche die ungleichmäßige Spannungsverteilung in der Gurtplatte ebenfalls berücksichtigt wird.

5. Zahlenbeispiel.

Es wird ein Verbundbalken mit der Stützweite $2L = 12\text{ m}$ angenommen, der in der Mitte eine Einzelkraft $P = 10\text{ t}$ trägt. Stahlträger I NP Nr. 40, $h = 40\text{ cm}$, $J_e = 29210\text{ cm}^4$, $W_e = 1460\text{ cm}^3$, $F_e = 118\text{ cm}^2$. Betonplatte $b = 60\text{ cm}$ (gesamte Gurtbreite 120 cm), $d = 20\text{ cm}$, $F_b = 2bd = 2400\text{ cm}^2$, $J_b = 80000\text{ cm}^4$, $W_b = 8000\text{ cm}^3$.

Mit $s = \frac{1}{2}(h + d) = 30\text{ cm}$ und $n_0 = 15$ folgt aus Gl. (5): $W_0 = 1725\text{ cm}^3$, $s_0 = 44.6\text{ cm}$. Für den Verbundquerschnitt gilt ferner gemäß Gl. (51) und (54): $\eta_0 = 22.7\text{ cm} > d$ (Nullinie liegt im Stahlträger), $S_b = 30500\text{ cm}^3$, $J_s = 1435000\text{ cm}^4$, $J_e/S_b = 47.1\text{ cm}$ (Hebelarm der inneren Kräfte).

Es werden $r = 10$ Haftstellen pro Trägerhälfte in gleichen Abständen $l_i = \text{konst.} = l = b = 60\text{ cm}$ angeordnet. Die erste Verbindung wird am Auflager angenommen und kann dort z. B. durch einen quer zum Stahlträger liegenden und mit diesem verbundenen Saumwinkel erfolgen; die Einleitung der Schubkraft erfolgt dann zwar anders als durch Schrägeisen, was aber auf die resultierende Höchstbeanspruchung keinen Einfluß hat. An den übrigen Haftstellen werden je zwei nebeneinander liegende Schrägstähle $\varnothing 20$ mit $f_e = 6.28\text{ cm}^2$ Querschnitt angenommen, die auf dem Stahlträger aufgeschweißt sind.

Aus Gl. (58) erhält man dann die Formziffer $\zeta = 1.67$ — diese Beziehung darf hier wegen des linearen Verlaufes der Biegemomente zufolge Einzelkraftwirkung verwendet werden (konstante Querkraft) und aus Gl. (61) folgt das Ausmaß der resultierenden Spannungserhöhung zu $\max \sigma_{b1} = 1.38 \sigma_{b1}^*$. Aus den Gl. (47) erhält man ferner $K_1 = 6.53$, $K_2 = 0.14\text{ cm}^{-1}$, $K_2/l = 0.00232\text{ cm}^{-2} = 23.2\text{ m}^{-2}$ und wegen $\zeta_i = \text{konst.} = 5.9$ folgt mit $b = l = 60\text{ cm}$ $\dots \kappa \doteq 1.6$ und $\kappa' \doteq 2.0$.

Alle weiteren Berechnungen beziehen sich nur auf die Einzelkraftwirkung.

Berechnung der Haftkräfte.

Die Auflösung des nach dem Verfahren (1) erforderlichen Gleichungssystems (48a) ist etwas umständlich und führt zu dem Ergebnis, daß die gesamte Summe aller Haftkräfte H_1 bis H_{10} über die Trägerhälfte nur um etwa 4% kleiner ist als nach dem Verfahren (2) gemäß Gl. (49). Man rechnet daher etwas zu ungünstig, wenn man die Haftkräfte aus der Gl. (50) bestimmt und erhält dann $H_1 = 3.18\text{ t}$, H_2 bis $H_{10} = 6.38\text{ t}$ und $G_{10} = 60.38\text{ t}$. Unter der Annahme eines stetigen, bis zur Trägermitte reichenden Verbundes erhält man aus Gl. (55) die größte Gurtkraft $G_{\max} = 63.50\text{ t}$, also um etwa 9% größer als nach dem Verfahren (1).

Spannungsnachweis an der Haftstelle $r = 10$.

Mit $M_r = 5.540 = 2700\text{ tcm}$, $G_r = 60.32\text{ t}$ folgt $(M_r - G_r s) = 890\text{ tcm}$ und $(M_r - G_r s_0) \doteq 10\text{ tcm}$. Aus der zweiten Gl. (7) erhält man die untere Randspannung

des Stahlträgers zu $\sigma_{e1} = -1020 \text{ kg/cm}^2$, nach der üblichen Rechnung gemäß Gl. (52) mit $\eta = -37.3 \text{ cm}$ Randabstand gilt $\sigma_{e1}^* = -1050 \text{ kg/cm}^2$, also ein etwas zu großer Wert. Die obere Randspannung der Gurtplatte errechnet sich aus Gl. (52) mit $\eta = 22.7 \text{ cm}$ Randabstand zu $\sigma_{b1}^* = 43 \text{ kg/cm}^2$ (übliche Rechnung), beträgt aber nach der genauen Untersuchung $\sigma_{b1} = 1.38 \cdot 43 = 59 \text{ kg/cm}^2$.

Spannungsnachweis in Trägermitte.

Mit $M_x = M_{\max} = 5 \cdot 600 = 3000 \text{ tcm}$ ergibt sich die größte Stahlspannung nach der üblichen Rechnung zu $\sigma_{e1}^* = -1170 \text{ kg/cm}^2$ und aus Gl. (6) mit $G = 60.32 \text{ t}$ zu $\sigma_{e1} = -1200 \text{ kg/cm}^2$, erfährt also eine nur unwesentliche Erhöhung. Die größte Betonrandspannung beträgt hier, nachdem die örtliche Spannungsspitze an der Haftstelle $r = 10$ bereits auf Null abgefallen ist, nur $\sigma_{b1} \doteq \sigma_{b1}^* = 48 \text{ kg/cm}^2$ und ist somit kleiner als die Beanspruchung an der Haftstelle r .

Kritik der Ergebnisse.

Die Randspannung in der Betonplatte liegt zufolge des unstetigen Verbundes an der Haftstelle r um 38% über dem üblicherweise ausgewiesenen Wert, jedoch nur um 19% über der an der Stelle des Größtmomentes (Trägermitte) berechneten Spannung. Die Stahlspannung ist wegen der kleineren Gurtkraft etwas größer als nach der üblichen Rechnung. Der Unterschied zwischen der üblichen und der genaueren Spannungsbestimmung wird aber noch geringer, wenn die Eigengewichtswirkung ($g = 0.67 \text{ t/m}$, $\max M_g = 1200 \text{ tcm}$) hinzugenommen wird, weil die zugehörigen Haftkräfte erst gegen das Trägerende zu stärker anwachsen. Es darf daher die Betonspannung zufolge Eigengewicht an der Haftstelle $r = 10$ wegen $\bar{H}_{10} = 0.7 \text{ t}$ wie üblich berechnet werden ($\bar{\sigma}_{b1} \doteq \bar{\sigma}_{b1}^* = 19 \text{ kg/cm}^2$) und man erhält daher insgesamt eine größte Betonpressung von $\sigma_{b1} = 59 + 19 = 78 \text{ kg/cm}^2$ gegenüber dem üblichen Wert von $\sigma_{b1}^* = 43 + 19 = 62 \text{ kg/cm}^2$. In Trägermitte ergibt sich die größte Betonpressung zu $\sigma_{b1} = 48 + 19 = 67 \text{ kg/cm}^2$ und diese Spannung ist nur mehr um 16% kleiner als die tatsächliche Höchstbeanspruchung an der Haftstelle r . Das Ausmaß der Spannungserhöhung ist daher ganz allgemein bei Gleichlasten meist wesentlich geringer als bei Einzellasten.

(Eingegangen am 30. September 1946.)

Konstruktion des Drehpolplanes einer Zwanglaufkette beim Zusammenfallen von Polgeraden mittels einer kinematisch äquivalenten Polfigur.

Anwendung auf Krümmungsmechanismen, insbesondere zur Ermittlung der Scheitelkrümmung von Radlinien.

Von A. Reuschel, Wien.

Mit 15 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Zu je drei Gliedern einer Zwanglaufkette gehört in jedem Augenblick eine Polgerade, auf welcher die drei relativen Drehpole liegen, welche die drei Kettenglieder paarweise bestimmen. Die aus den Drehpolen und Polgeraden einer Zwanglaufkette bestehende Figur nennt man ihren Drehpolplan. Zwei geometrisch äquivalente Drehpolpläne von der Eigenschaft, daß auf entsprechenden Polgeraden die Teilverhältnisse entsprechender Drehpole gleich sind, werden in dieser Arbeit kinematisch äquivalent genannt.

Es wird gezeigt, daß sich jede ausgeartete Polfigur mit zusammenfallenden Polgeraden auf unendlich viele Arten durch eine mit ihr kinematisch gleichwertige, nicht ausgeartete Polfigur ersetzen läßt. Mit Hilfe des neuen Begriffes der kinematischen Äquivalenz von Drehpolplänen lassen sich somit auch ausgeartete Polfiguren zeichnerisch behandeln.

Bekanntlich läßt sich die Krümmung jeder ebenen Kurve mit Hilfe des Drehpolplanes eines Zwanglaufmechanismus finden, bei dem ein Punkt C_m des Systems S_m im System S_1 die gegebene Kurve c_1 beschreibt, während eine durch C_m gehende Gerade von S_m auf der Evolute von c_1 ohne zu gleiten abrollt. Die kinematische Äquivalenz von Polfiguren wird in der vorliegenden Arbeit dazu verwendet, um für einige geometrisch und technisch wichtige Kurven auch für solche Lagen eines derartigen Krümmungsmechanismus, in denen sich ausgeartete Polfiguren ergeben, zu Krümmungskonstruktionen zu gelangen.

Summary. The paper shows that any degenerated central plan, i. e. the central axes which are coinciding, may be replaced by an infinity of kinematically equivalent, non degenerated, central plans. It is already known that the curvature of any plane curve may be found by means of the central plan of a mechanical device with forced connections. Bearing in mind the new notion of the equivalency of central plans, even degenerated ones may be treated graphically. This principle is applied to the construction of the curvature of several curves, being important from the geometrical, or technical, point of view, even for those positions of the mechanism where the central plan is degenerated.

Résumé. Ce travail démontre que toute figure centrale dégénérée, c'est-à-dire, dont les droites centrales coïncident, peut être remplacée par une infinité de figures centrales non dégénérées, équivalentes du point de vue cinématique. On sait que la courbure d'une courbe quelconque peut être déterminée à l'aide de la configuration centrale d'un dispositif mécanique à liaisons desmodromiques. Avec la notion nouvelle de l'équivalence des configuration centrales, même celles qui sont dégénérées, deviennent accessibles à une épure. Ce principe est appliqué à l'épure de la courbure de certaines courbes, intéressantes au point de vue géométrique ou technique, même pour des positions du mécanisme telle qu'il en résulte une configuration centrale dégénérée.

1. Einleitung.

Die Drehpolpläne von ebenen Zwanglaufmechanismen haben in der Getriebelehre und in der Theorie der Fachwerke zu theoretisch wichtigen und praktisch nützlichen Ergebnissen geführt. Bekanntlich können schon aus gewissen Drehpolen die übrigen durch bloßes Ziehen von Polstrahlen erhalten werden. Die auf die Drehpolpläne aufgebauten zeichnerischen Verfahren versagen meist für solche Sonderlagen der Zwanglaufmechanismen, in denen zusammenfallende Polgeraden vorkommen. Aber gerade diesen Sonderlagen kommt vielfach eine außerordentliche praktische Bedeutung zu. Überdies werden die graphischen Verfahren schon bei Annäherung an eine solche Sonderlage unbrauchbar, weil dann Polstrahlen mit schleifenden Schnitten auftreten, welche die Genauigkeit der Konstruktion zu sehr beeinträchtigen. Dies machte bisher eigene Untersuchungen für solche Sonderlagen erforderlich, wobei man meist zur Rechnung Zuflucht genommen hat.

Nachdem in Abschnitt 2 die wichtigsten Eigenschaften der Drehpolpläne einer zwangsläufigen ebenen kinematischen Kette kurz gestreift werden, wird nun in Abschnitt 3 gezeigt, daß man jede ausgeartete Polfigur auf Grund des Zwanglaufs des Getriebes auf unendlich viele Arten durch eine mit ihr „kinematisch gleichwertige“, nicht ausgeartete Polfigur ersetzen kann. Mit Hilfe dieses meines Wissens neuen Gedankens lassen sich nun auch ausgeartete Polfiguren konstruktiv auswerten.

Bekanntlich läßt sich auch die Krümmung einer ebenen Kurve mit Hilfe des Drehpolplanes eines gewissen sie mechanisch erzeugenden Zwanglaufmechanismus finden, den man auf Grund der Erzeugung oder einer charakteristischen Eigenschaft der zugrunde gelegten Kurve leicht angeben kann.¹ Die zuvor erwähnte kinematische Äquivalenz von Polfiguren wird in den Abschnitten 4 bis 7 dazu verwendet, um auch für solche Lagen eines derartigen „Krümmungsmechanismus“, in denen sich aus-

¹ Wegen einer ausführlichen Darstellung dieses Gedankens s. A. Reuschel: Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen. Ein Beitrag zur Geometrie der Getriebe und zur graphischen Differentialgeometrie ebener Kurven. Österr. Ingenieur-Archiv, Bd. III, S. 9, Jg. 1949.

geartete Polfiguren ergeben, zu Krümmungskonstruktionen zu gelangen. Bei Verwendung kinematisch äquivalenter Drehpolpläne wird das vorhin angeführte kinematische Prinzip zur Konstruktion von Krümmungskreisen ausnahmslos anwendbar. Dieses Verfahren wird dabei auf einige theoretisch und technisch wichtige Kurven (Radlinien oder Trochoiden, Kegelschnitte und Konchoiden) praktisch angewandt.

Unter anderem machte das Versagen der Savaryschen Krümmungskreis-konstruktion für einen auf einer Symmetrieachse liegenden Scheitel einer Trochoide bisher die Angabe eines Sonderverfahrens für solche Punkte erforderlich. Nach den Erörterungen des Abschnitts 5 lassen sich alle bis jetzt bekanntgewordenen Scheitelkrümmungskreis-konstruktionen für Trochoiden als besondere Annahmen von Polfiguren auffassen, die kinematisch äquivalent sind zu der für diese Lage ausgearteten Polfigur des mit der Trochoide verknüpften Krümmungsmechanismus.

2. Der Drehpolplan einer zwangsläufigen ebenen kinematischen Kette.

Eine Aneinanderreihung von mehreren, miteinander verbundenen, beweglichen Systemen derselben Ebene, bei der jedes System gegen jedes andere eine Zwanglaufbewegung ausführt, nennt man eine zwangsläufige ebene kinematische Kette. Die einzelnen Systeme heißen Glieder der kinematischen Kette. Bei einer ebenen Zwanglaufkette gehört zu jedem Glied in bezug auf jedes andere in jedem Augenblick des Bewegungsablaufs ein ganz bestimmter (relativer) Drehpol.

Wir betrachten nun eine aus den n Systemen $S_1, S_2 \dots S_n$ bestehende zwangsläufige ebene kinematische Kette und greifen irgend drei Systeme S_i, S_k, S_l der Kette heraus.

Der augenblickliche relative Drehpol des Systems S_i gegen das System S_k , das ist derjenige Punkt des Systems S_i , der im betrachteten Zeitpunkt gegen das System S_k in Ruhe ist, möge mit P_{ik} oder kurz mit ik bezeichnet werden. Dabei ist $P_{ki} = P_{ik}$. Die relativen Drehpole P_{ik}, P_{il} und P_{kl} , welche die drei Systeme S_i, S_k, S_l zu je zweien besitzen, liegen bekanntlich stets auf einer Geraden, welche die zu den drei Systemen gehörige Polgerade genannt wird.

Ferner sei ω_{ik} die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System S_i um den Punkt P_{ik} gegen das System S_k dreht. Werden Winkelgeschwindigkeiten von verschiedenem Drehsinn und auf jeder Polgeraden, Strecken von verschiedenem Durchlaufungssinn, durch das Vorzeichen unterschieden, so ist $\omega_{ki} = -\omega_{ik}$ und $P_{ik}P_{il} = -P_{il}P_{ik}$.

Zwischen den relativen Winkelgeschwindigkeiten ω_{ik}, ω_{kl} und ω_{li} , welche die drei Systeme S_i, S_k, S_l zu je zweien gegeneinander besitzen, besteht die Beziehung $\omega_{ik} + \omega_{kl} + \omega_{li} = 0$. Sie drückt die selbstverständliche Tatsache aus, daß jedes System gegen sich selbst in Ruhe ist.

Für die Relativbewegungen von drei Gliedern einer kinematischen Zwanglaufkette gilt

Satz 1: Die zu den drei Gliedern S_i, S_k, S_l einer ebenen zwangsläufigen kinematischen Kette in jedem Augenblick gehörigen relativen Drehpole P_{ik}, P_{il}, P_{kl} liegen stets auf einer Geraden (Polgeraden). Zwischen den Abständen dieser relativen Drehpole und den augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten ω_{ik}, ω_{kl} und ω_{li} , wobei $\omega_{ik} + \omega_{kl} + \omega_{li} = 0$ ist, besteht die fortlaufende Verhältnisgleichung²

$$\omega_{ik} : \omega_{kl} : \omega_{li} = P_{il}P_{kl} : P_{ik}P_{il} : P_{kl}P_{ik}. \quad (1)$$

Sind also die drei relativen Drehpole bekannt, die zu drei Gliedern einer zwang-

² K. Wolf: Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme, S. 209—211. Wien. 1931.

läufigen kinematischen Kette gehören, so kennt man damit auch das Verhältnis der augenblicklichen relativen Winkelgeschwindigkeiten der drei Kettenglieder.

Umgekehrt gehören zu dem Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\omega_{ik} : \omega_{kl}$ noch unendlich viele, in gerader Linie liegende und untereinander ähnliche Punktetripel P_{ik}, P_{il}, P_{kl} .

Da zu je zwei Gliedern einer Zwanglaufkette in jedem Augenblick ein Drehpol und zu je drei Gliedern eine Polgerade gehört, auf der die drei relativen Drehpole liegen, welche die drei Kettenglieder paarweise bestimmen, so besitzt eine aus n Gliedern bestehende zwangsläufige kinematische Kette in jedem Augenblick $\binom{n}{2}$ Drehpole und $\binom{n}{3}$ Polgeraden. Die aus allen Drehpolen und Polgeraden einer Zwanglaufkette bestehende Figur nennt man ihren Drehpolplan.³ Nimmt man zu den Systemen S_i und S_k noch eines der $n - 2$ übrigen der n gegebenen Systeme hinzu, so erkennt man, daß es insgesamt $n - 2$ Systemtripel gibt, an denen die Systeme S_i und S_k zugleich beteiligt sind. Da zu jedem solchen Tripel eine Polgerade gehört, auf der auch der Drehpol P_{ik} liegen muß, so gehen durch P_{ik} und somit auch durch jeden beliebigen anderen Drehpol insgesamt $n - 2$ Polgeraden.

Für den geometrischen Aufbau der Drehpolpläne gilt somit der

Satz 2: Der Drehpolplan einer n -gliedrigen Zwanglaufkette besteht aus $\binom{n}{2}$ Drehpolen und $\binom{n}{3}$ Polgeraden, die so angeordnet sind, daß durch jeden Drehpol $n - 2$ Polgeraden gehen und auf jeder Polgeraden drei Drehpole liegen.

Dafür sagt man auch kurz, daß der Drehpolplan einer aus n Gliedern bestehenden Zwanglaufkette eine Konfiguration mit dem Symbol $\left(\binom{n}{2}\right)_{n-2} \left(\binom{n}{3}\right)_3$ bilde. Im besonderen bilden die sechs Drehpole und vier Polgeraden von vier ebenbewegten Systemen die Konfiguration $(6_2 \ 4_3)$, die auch vollständiges Vierseit heißt, da sie aus vier Geraden und ihren sämtlichen Schnittpunkten besteht. Für $n = 5$ erhält man die Konfiguration $(10_3 \ 10_3)$, die auch Desarguessche Konfiguration genannt wird. Die ebene Konfiguration mit dem Symbol $\left(\binom{n}{2}\right)_{n-2} \left(\binom{n}{3}\right)_3$ heißt allgemein eine polyedrale Konfiguration,⁴ weil sie auch entsteht, wenn man die räumliche Konfiguration, die aus den sämtlichen Verbindungsgeraden und Verbindungsebenen von n Punkten des Raumes besteht, mit einer Ebene schneidet, die durch keinen der angenommenen n Raumpunkte hindurchgeht. Aus den Ebenen und Geraden der räumlichen Konfiguration entstehen dabei die Geraden und Punkte der ebenen Konfiguration. Die n Raumpunkte müssen nur so gewählt werden, daß nie vier Punkte in einer Ebene, also auch niemals drei Punkte auf einer Geraden liegen.

3. Kinematisch äquivalente Drehpolpläne.

a) Wir nennen vorerst zwei Konfigurationen K_1 und K_2 (geometrisch) äquivalent, wenn man jedem Punkt von K_1 einen Punkt von K_2 und jeder Geraden von K_1 eine Gerade von K_2 in ein-eindeutiger Weise so zuordnen kann, daß inzidenten Elementen in K_1 wieder inzidente Elemente in K_2 entsprechen und umgekehrt.

Läßt man in einer Zwanglaufkette ein Glied S_i gegen irgend ein anderes Glied S_k eine Drehung um den gemeinsamen Drehpol P_{ik} mit einer beliebig großen augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω_{ik} ausführen, so ist damit zufolge des Zwanglaufs auch die augenblickliche gegenseitige Drehgeschwindigkeit von irgend zwei beliebigen

³ L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, S. 430—434. Leipzig. 1888. — K. Wolf: Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme, S. 210—211. Wien. 1931.

⁴ L. Levi: Geometrische Konfigurationen, S. 159—166. Leipzig. 1929.

anderen Kettengliedern mitbestimmt. Dem entspricht, daß sich sämtliche Drehpole bloß aus dem Aufbau der Zwanglaufkette heraus ermitteln lassen.

Umgekehrt lassen sich aus dem Drehpolplan einer Zwanglaufkette nach Satz 1 die Verhältnisse aller relativen Winkelgeschwindigkeiten entnehmen, die die einzelnen Kettenglieder gegeneinander haben.

Wählt man an Stelle einer Polkonfiguration eine mit ihr äquivalente Konfiguration von der Eigenschaft, daß auf jeder Polgeraden der neuen Konfiguration das Teilverhältnis der drei auf ihr liegenden, in irgend einer Reihenfolge genommenen Drehpole mit dem Teilverhältnis der entsprechenden Drehpole der gegebenen Polkonfiguration übereinstimmt, so kann man auch aus der neuen Konfiguration die Verhältnisse der relativen Winkelgeschwindigkeiten ablesen, mit denen sich die einzelnen Kettenglieder im betrachteten Zeitpunkt gegeneinander bewegen. Zwei derartige Drehpolpläne sollen daher kinematisch äquivalent heißen.

Da man zur Festlegung eines Drehpolplanes nicht alle Drehpole anzugeben hat, weil schon aus gewissen Drehpolen die übrigen durch bloßes Zeichnen von Polstrahlen erhalten werden, so lassen sich mit Hilfe der kinematischen Äquivalenz von Drehpolplänen auch solche Sonderlagen von Zwanglaufketten zeichnerisch behandeln, in denen zusammenfallende Polstrahlen vorkommen. Bisher hat man bei der Behandlung von derartigen Sonderlagen meist zur Rechnung Zuflucht genommen. Dieser Übergang von einem Drehpolplan zu einem kinematisch äquivalenten ist aber auch schon in der Nähe einer solchen Sonderlage von großem Nutzen, da dann Polstrahlen mit schleifenden Schnitten auftreten.

b) Soll der Drehpolplan einer dreigliedrigen Zwanglaufkette durch einen kinematisch äquivalenten ersetzt werden, so können von diesem noch zwei Drehpole, etwa 12 und 13, beliebig gewählt werden.

Soll an Stelle der Polkonfiguration einer viergliedrigen Zwanglaufkette, die bekanntlich ein vollständiges Vierseit ist, eine kinematisch äquivalente Polfigur gesetzt werden, so genügt zur eindeutigen Festlegung die Annahme von drei nicht in gerader Linie liegenden Drehpolen, also beispielsweise von 12, 13 und 14. Die übrigen Drehpole 23, 24, 34 der kinematisch äquivalenten Figur werden sodann auf Grund der Gleichheit der Teilverhältnisse gefunden, die auf jeder Polgeraden für die auf ihr liegenden drei Drehpole bestehen muß.

Da durch die beiden Dreiecke 12, 13, 14 eine Affinität in der Ebene gegeben ist, welche Geraden wieder in Gerade überführt und den Wert jedes Teilverhältnisses ungeändert läßt, so führt die Konstruktion eines zu dem gegebenen vollständigen Vierseit kinematisch äquivalenten zu einem zu ihm affinen vollständigen Vierseit. Demnach liegen die Drehpole 23, 24 und 34 der kinematisch äquivalenten Polfigur tatsächlich wieder auf einer Polgeraden und weisen dasselbe Teilverhältnis auf, wie die entsprechenden Punkte des gegebenen vollständigen Vierseits.

Jede affine Transformation des Drehpolplanes einer n -gliedrigen ebenen Zwanglaufkette liefert einen kinematisch äquivalenten Drehpolplan. Während aber bei einer viergliedrigen Kette mit den affinen Drehpolplänen alle kinematisch äquivalenten erfaßt werden, so gibt es bei mehrgliedrigen Ketten neben diesen auch noch kinematisch äquivalente Drehpolpläne, die zu dem gegebenen nicht mehr affin sind. Dies leuchtet ohne weiteres ein, da für die kinematische Äquivalenz die Übereinstimmung des Teilverhältnisses von drei in gerader Linie liegenden Punkten nicht für die ganze Ebene, sondern nur für die auf den Konfigurationsgeraden liegenden Konfigurationspunkte gefordert wird.

Es soll nun gezeigt werden, daß man von einem Drehpolplan, der zu dem einer n -gliedrigen Zwanglaufkette kinematisch äquivalent ist, $n - 1$ Drehpole, von denen

keine drei in gerader Linie liegen, wie beispielsweise 12, 13, 14 . . . 1 $n-1$, 1 n , noch beliebig wählen darf. (Man könnte aber ebensogut etwa die $n-1$ Drehpole 12, 23, 34 . . . $n-1$ n annehmen.)

Der Nachweis kann durch vollständige Induktion leicht geführt werden. Da der behauptete Satz für $n=3$ selbstverständlich ist und für $n=4$ soeben bewiesen wurde, so wollen wir ihn für die $(n-1)$ -gliedrige Zwanglaufkette $S_1, S_2 \dots S_{n-1}$ als richtig voraussetzen. Zeichnen wir durch den einzigen außerdem noch gegebenen Drehpol 1 n des kinematisch äquivalenten Drehpolplanes die Polgeraden nach den beiden Drehpolen 1 j und 1 k ($j, k = 2, 3 \dots n-1$) und bestimmen darauf durch Übertragen von Teilverhältnissen die Drehpole j n und k n , so kann man ebenso wie beim vollständigen Vierseit zeigen, daß die Punkte j n , k n und j k der zur gegebenen Polfigur kinematisch äquivalenten wieder in gerader Linie liegen und dasselbe Teil-

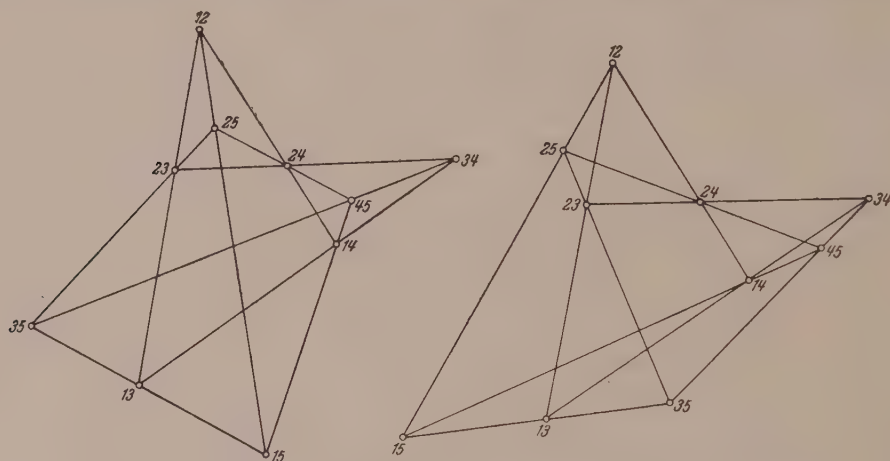


Abb. 1. Zwei kinematisch äquivalente (nicht affine) Drehpolpläne.

verhältnis haben wie die entsprechenden Punkte des gegebenen Drehpolplanes. Da diese beiden Eigenschaften für die durch den Drehpol 1 n gehenden Polgeraden zufolge der Konstruktion von selbst erfüllt sind, so ist damit für alle neu hinzugetretenen Polgeraden das Vorhandensein dieser Eigenschaften nachgewiesen. Es besteht somit tatsächlich der

Satz 3: Eine Polfigur, die mit der Polfigur einer n -gliedrigen Zwanglaufkette kinematisch äquivalent ist, ist erst durch Annahme von $n-1$ Drehpolen festgelegt, von denen keine drei in gerader Linie liegen.

Abb. 1 zeigt zwei kinematisch äquivalente, aber zueinander nicht affine Drehpolpläne einer fünfgliedrigen Zwanglaufkette. Zur deutlicheren Veranschaulichung wurden die Drehpole 12, 13, 14 in den neuen Drehpolplan gleichsinnig, die Drehpole 12, 13, 15 hingegen ungleichsinnig kongruent übertragen. Die gleichsinnige Kongruenz erstreckt sich damit auch auf die vollständigen Vierseite mit den Ecken 12, 13, 14, 23, 24 und 34, die ungleichsinnige Kongruenz auch auf die vollständigen Vierseite mit den Ecken 12, 13, 15, 23, 25 und 35. Hingegen bilden in diesen beiden Polfiguren die Drehpole, die auf entsprechenden Polgeraden durch den Drehpol 45 liegen, wie im allgemeinen Fall, ähnliche Punktetripel.

e) Um zwei kinematisch äquivalente Drehpolpläne durch eine einfache Konstruktion herzustellen, ist es zweckmäßig, entsprechende Punkte der beiden Polfiguren auf die Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels zu legen (Abb. 2). Dazu hat man durch

er in den Drehpolen 12, 13, 14, 23, 24, 34 mit dem ursprünglichen Drehpolplan übereinstimmt. Die Drehpole 15, 25, 35 und 45 der ursprünglichen Polfigur müssen dann mit den jeweils entsprechenden Drehpolen (15), (25), (35) bzw. (45) der kinematisch äquivalenten Polfigur auf parallelen Geraden liegen.

4. Mechanismen zur Herleitung einer Krümmungskonstruktion für eine Radlinie.

a) Wir betrachten nun eine ebene Bewegung, bei der der Kreis p_2 des Systems S_2 auf dem Kreis p_1 des (ruhend gedachten) Systems S_1 abrollt.⁵ Die Punktbahnen (Bahnkurven) dieser Kreisrollung⁶ heißen Radlinien oder Trochoiden.

Um für jede Stellung der Systeme S_1 und S_2 den Krümmungskreis für den eben von A_2 durchlaufenen Punkt der Trochoide a_1 zu bestimmen, nehmen wir noch das System S_3 hinzu (Abb. 4), das bei den Achsen der beiden Kreise p_1 und p_2 drehbar an die Systeme S_1 bzw. S_2 angeschlossen ist. Das Abrollen des in S_2 gelegenen Polkreises p_2 auf dem dem System S_1 angehörenden Polkreis p_1 wird durch das Mitführen des Systems S_3 nicht behindert. Wir erreichen vielmehr dadurch, daß der in den jeweiligen Berührungspunkt von p_1 und p_2 fallende Drehpol 12 sich in jedem Augenblick der Bewegung stets mit demselben Punkt B_3 des Systems S_3 deckt, während die Drehpole 13 und 23 ständig in die Mittelpunkte der Kreise p_1 bzw. p_2 fallen.

Schließlich wird auch noch der Stab S_4 verwendet,⁷ der im Punkte $A_2 = 24$ drehbar mit dem System S_2 verbunden ist, wobei sich S_4 ständig auf den festen Punkt B_3 des Systems S_3 stützen soll. Der Drehpol 34 ist daher der Schnittpunkt der in B_3 auf S_4 errichteten Normalen mit der Polgeraden 23—24. Der Punkt $A_2 = 24$ des Stabes S_4 beschreibt hierbei im ruhenden System S_1 die Trochoide a_1 und da S_4 während der ganzen Bewegung stets Normale der Trochoide bleibt, so rollt also der Stab S_4 gleitungslos auf der Evolute a_1' der Trochoide a_1 ab. Der zugehörige Drehpol 14, der sich mit Hilfe der Polgeraden 12—24 und 13—34 ergibt, ist somit als Berührungspunkt der Kurvennormalen S_4 mit der Evolute a_1' zugleich der Krümmungsmittelpunkt der von A_2 eben durchlaufenen Bahnstelle.

Diese verblüffend einfache bewegungsgeometrische Herleitung der bekannten Savaryschen Konstruktion für die Krümmung einer Trochoide als Drehpolplan einer viergliedrigen kinematischen Kette stammt von J. Krames.⁸ Ihre Begründung erfordert darnach bloß die viermalige Anwendung des Satzes, daß die relativen Drehpole von drei gegeneinander ebenbewegten Systemen stets auf einer Geraden liegen. Diese Herleitung der Savaryschen Konstruktion entspricht zugleich der Richtung, die der Altmeister der Kinematik, F. Reuleaux, diesem technischen Wissenszweig gewiesen hat.⁹

b) Andere Krümmungskreiskonstruktionen für die Trochoide a_1 ergeben sich, wenn wir den Stab S_4 so in das Getriebe einfügen, daß er sich ständig auf den Punkt A_2 des Systems S_2 stützt und im Punkte $B_3 = 12 = 34$ gelenkig mit dem System S_3 verbunden wird. Der Drehpol 24 ergibt sich nun als Schnittpunkt des in A_2 auf S_4

⁵ Mit S_1 soll auch künftighin immer das ruhende System (Gestell des Mechanismus) bezeichnet werden.

⁶ Diese Bewegung tritt in der Technik vielfach auf. So ist beispielsweise die Relativbewegung zweier Stirnzahnräder mit konstantem Übersetzungsverhältnis eine derartige Bewegung. Die Polkreise p_1 und p_2 heißen dann Teilkreise oder Wälzkreise der Zahnräder.

⁷ Im Interesse einer einfacheren Ausdrucksweise sei es in der Folge gestattet, einen Stab als Repräsentanten des ebenen Systems S_i ebenfalls mit S_i zu bezeichnen.

⁸ J. Krames: Zur Konstruktion der Krümmungskreise von ebenen und sphärischen Radlinien. *Getriebetechnik (Reuleaux-Mitt.)* 10, 481 (1942) oder auch J. Krames: *Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer*, S. 187f. Wien. 1947.

⁹ Siehe F. Reuleaux: *Lehrbuch der Kinematik*, Bd. II, S. 21f. Braunschweig. 1900.

errichteten Lotes mit der Polgeraden 23—34. Da die sechs Drehpole des hier betrachteten Mechanismus in einer Geraden liegen, so benötigt man zur Konstruktion des Drehpols 14 einen kinematisch äquivalenten Drehpolplan. Der Mechanismus bewirkt hier, daß der Stab S_4 auf der Evolute a_1' der Trochoide a_1 abwälzt (rollt und gleitet). Der gesuchte Krümmungsmittelpunkt ist der Berührungspunkt der Kurvennormalen S_4 mit der Evolute a_1' und demnach der Fußpunkt des aus dem Drehpol 14 auf S_4 gefälltten Lotes.

5. Verwendung kinematisch äquivalenter Polfiguren zur Konstruktion der Scheitelkrümmung von Trochoiden.

Kommt der beschreibende Punkt $A_2 = 24$ des in Abb. 4 dargestellten Getriebes in einen auf einer Symmetrieachse liegenden Scheitel der von ihm im System S_1

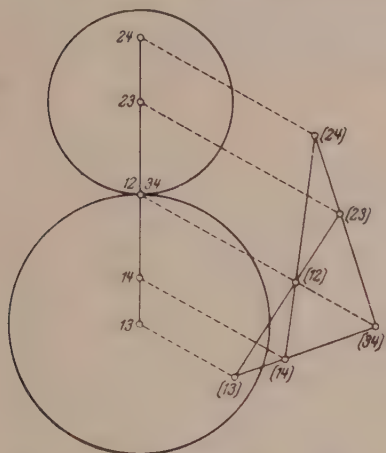


Abb. 5. Konstruktion für die Scheitelkrümmung einer Trochoide mittels eines beliebigen kinematisch äquivalenten Drehpolplanes.

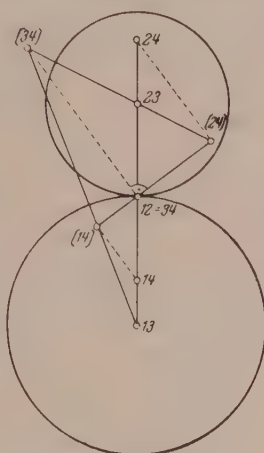


Abb. 6. Konstruktion für die Scheitelkrümmung einer Trochoide.

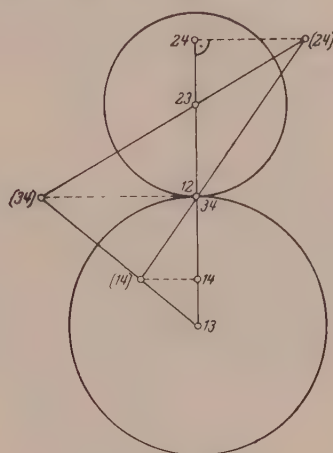


Abb. 7. Konstruktion für die Scheitelkrümmung einer Trochoide.

durchlaufenen Trochoide, so fallen für diese Lage alle vier Polgeraden der zugehörigen Polfigur in eine zusammen. Die in Abb. 4 dargestellte bekannte Konstruktion des Krümmungskreises für einen Punkt einer Trochoide versagt also für ihre Scheitel, da die Polfigur jetzt nicht mehr durch bloßes Ziehen von Polgeraden vervollständigt werden kann. Nach den Erörterungen des Abschnitts 3 läßt sich aber diese Konstruktion mit Hilfe einer geeigneten kinematisch äquivalenten Polfigur sofort durchführen (Abb. 5).

Der Umstand, daß man eine kinematisch äquivalente Polfigur noch in weitgehendem Maße beliebig wählen kann, läßt sich durch geschickte Anordnung zu besonders einfachen Konstruktionen ausnützen.

Es ist bemerkenswert, daß sich alle bisher bekanntgewordenen Scheitelkrümmungskonstruktionen für Trochoiden (Abb. 6 bis 11), die auf Grund der zeichnerischen Auswertung des errechneten Scheitelkrümmungshalbmessers oder mit Hilfe von geometrischen Sonderbetrachtungen (Affinität mit „unendlich starker“ Verzerrung, quadratische Verwandtschaft entsprechender Paare von Krümmungsmittelpunkten) gefunden wurden,¹⁰ bloß als besondere Annahmen von Polfiguren aufgefaßt werden können, die mit der gegebenen ausgearteten Polfigur kinematisch äquivalent sind.

¹⁰ G. Koenigs: Leçons de cinématique, S. 441—443. Paris. 1897. — Enzykl. math.

Zur Vereinfachung der Konstruktion kann man die drei Drehpole auf irgend einer der vier Seiten des kinematisch äquivalenten vollständigen Vierseits mit den gleichbezeichneten Drehpolen des ausgearteten Vierseits zusammenfallen lassen. In den Abb. 6, 7 und 8 wurden die Drehpole 12, 13 und 23, in Abb. 9 die Drehpole 12, 14 und 24, in Abb. 10 die Drehpole 13, 14 und 34 und schließlich in Abb. 11 die Dreh-

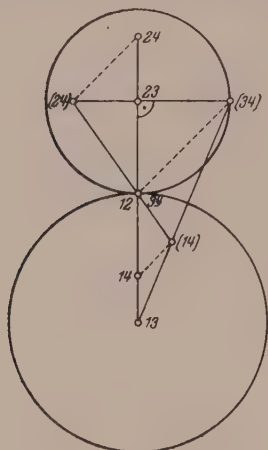


Abb. 8.

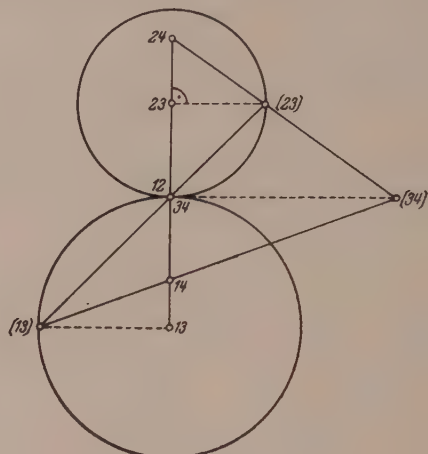


Abb. 9.

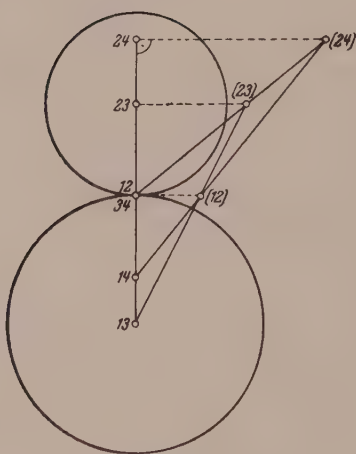


Abb. 10.

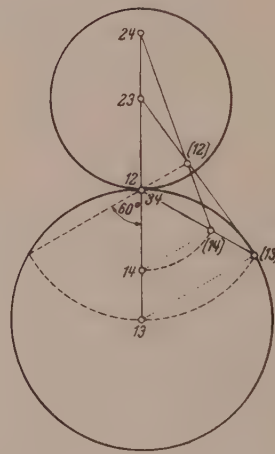


Abb. 11.

Abb. 8—11. Konstruktion für die Scheitelkrümmung einer Trochoide.

pole 23, 24 und 34 unverändert in den kinematisch äquivalenten Drehpolplan übernommen.

In den Abb. 7, 9 und 10 wurden die Verbindungsgeraden gleichbezeichneter Punkte der beiden kinematisch äquivalenten Polfiguren normal zur Geraden durch die Mittel-

Wissensch. III D 4 (G. Scheffers: Besondere transzendente Kurven), S. 190 und 191, Anm. 10). — H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, S. 239. Leipzig. 1908. (Sammlung Schubert, Bd. LVI.) — W. Hartmann: Die Maschinengetriebe, Bd. I, S. 86. Stuttgart und Berlin. 1913. — A. Schiebel: Zahnräder, 1. Teil, 2. Aufl., S. 6 und 7. Berlin. 1922. — R. Müller: Einführung in die theoretische Kinematik, S. 25. Berlin. 1932. — A. E. Mayer: Über die Scheitelkrümmung der zyklischen Kurven. Z. angew. Math. Mech. **14**, 188—189 (1934). — R. Beyer: Archiv für Getriebetechnik (Reuleaux-Mitt.) **3**, 227 (1935).

punkte der beiden Polkreise gewählt. Dabei wurde in Abb. 9 die Polgerade (13)—12—(23) außerdem unter dem Winkel von 45° gegen die Verbindungsgerade der beiden Polkreismittelpunkte angenommen.

In Abb. 6 wurden die Projektionsstrahlen normal zur Polgeraden (14)—12—(24) gewählt.

In Abb. 8 schließt die Verbindungsgerade der Polkreismittelpunkte mit der Projektionsstrahlenrichtung einen Winkel von 45° und mit der Polgeraden (24)—23—(34) einen rechten Winkel ein.

In Abb. 11 schließlich bilden die Projektionsstrahlen und der Polstrahl (13)—(14)—34 mit der Verbindungsgeraden der beiden Polkreismittelpunkte die Winkel $\pm 60^\circ$. Die Abbildung zeigt, wie man die Konstruktion mittels der gestrichelten Kreisbogen mit Benützung des Zirkels geschickt ausführen kann. Die Projektionsstrahlen 13—(13) und 14—(14) dienen nur zur Erläuterung und brauchen nicht gezeichnet zu werden.

6. Bestimmung der Krümmung eines Kegelschnittes mittels eines Mechanismus mit dauernd ausgearteter Polfigur.

Bekanntlich läßt sich für jede ebene Kurve auf Grund ihrer Entstehung oder einer charakteristischen Eigenschaft ein ebener Zwanglaufmechanismus angeben, der aus den Gliedern $S_1, S_2 \dots S_m$ bestehen möge, bei dessen Bewegung eine Gerade des Systems S_m (der Stab S_m) auf der Evolute k_1' der zu untersuchenden Kurve k_1 abrollt.¹ Es gibt also daher auf dem Stab S_m einen festen Punkt K_m , der die Kurve k_1 zur Bahnkurve hat. Der Drehpol 1 m dieses Zwanglaufmechanismus ist demnach zugleich der Krümmungsmittelpunkt für die eben von K_m durchlaufene Stelle der Bahnkurve k_1 .

Es soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden, wie man durch Übergang zu einem kinematisch äquivalenten Drehpolplan auch jene Fälle auf Grund des obigen Gedankens konstruktiv verfolgen kann, in denen der Drehpolplan des Krümmungsmechanismus entweder dauernd oder für gewisse Sonderlagen ausgeartet ist, also zusammenfallende Polgeraden enthält.

Wir wollen nun auf die Eigenschaft, daß die Tangenten und Normalen eines Kegelschnitts stets in die Winkelsymmetralen der Leitstrahlen fallen, eine Krümmungsmittelpunktskonstruktion für die Ellipse (oder Hyperbel) gründen.

Wir benützen dazu einen viergliedrigen Mechanismus, der aus der Zeichenebene (dem Gestell) S_1 und den drei Stäben S_2, S_3 und S_4 besteht, die in jeder Stellung die Lage der beiden Leitstrahlen und der Kurvennormalen einnehmen sollen (Abb. 12). Bei der Bewegung sollen sich die Stäbe S_2 und S_3 (Leitstrahlen) ständig auf die Punkte E_1 bzw. F_1 (Brennpunkte) des Systems S_1 stützen. Die drei Stäbe S_2, S_3 und S_4 sollen ferner im Punkte $23=24=34$ gelenkig miteinander verbunden sein. Dieses Gelenk wird bei der Bewegung den Kegelschnitt beschreiben.

Die Drehpole 12 und 13 erhält man dann als die Schnittpunkte der sich mit S_4 deckenden Kegelschnittnormalen mit den in E_1 und F_1 auf S_2 bzw. S_3 errichteten

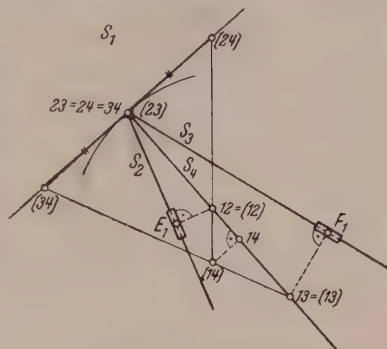


Abb. 12. Konstruktion der Krümmung einer Ellipse mittels eines auf der Beziehung ihrer Normalen zu den Leitstrahlen gegründeten Mechanismus mit dauernd ausgeartetem Drehpolplan mit Hilfe einer dazu kinematisch äquivalenten Polfigur.

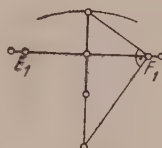


Abb. 13. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für den Nebenseitel einer Ellipse.

Loten. Da sich der Stab S_4 stets so bewegt, daß er sich mit der Normalen des vom Gelenk $23=24=34$ beschriebenen Kegelschnitts deckt, so ist der Drehpol 14 der Krümmungsmittelpunkt für die vom Gelenk eben durchlaufene Bahnstelle.

Da der Drehpolplan dieses viergliedrigen Mechanismus immer ausgeartet ist, so konstruieren wir den Drehpol 14 mit Hilfe einer kinematisch äquivalenten Polfigur. In Abb. 12 wurden dabei die Drehpole (12), (13) und (23) der äquivalenten Polfigur so gewählt, daß sie sich mit den gleichbezeichneten Drehpolen des ausgearteten Polplanes jeweils decken. Ferner wurde die Richtung der parallelen Projektionsstrahlen normal zu S_4 angenommen. Da sich die Stäbe S_2 und S_3 gegen S_4 in jedem Augenblick mit entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{24} = -\omega_{34}$ bewegen und man für $\omega_{kl} = -\omega_{lk}$ aus Gl. (1) die Beziehung $P_{il} P_{ik} = P_{ik} P_{kl}$ erhält, so hat man beim Zeichnen eines kinematisch äquivalenten Polplanes zu beachten, daß der Punkt (23) der Mittelpunkt der Strecke (24)—(34) sein muß.

Für den Nebenscheitel der Ellipse erhält man damit eine besonders einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes (Abb. 13).

Stellt man die Verbindung der hier betrachteten vier Systeme in anderer Weise her, so erhält man andere Krümmungsmittelpunktskonstruktionen.¹¹

7. Konstruktion der Krümmung der Konchoiden einer Geraden mittels des Drehpolplanes eines Krümmungsmechanismus.

Wird ein Stab S_2 gegen die Ebene S_1 so bewegt, daß er sich ständig auf den Punkt A_1 stützt, während ein Punkt B_2 von S_2 die Gerade b_1 beschreibt (Abb. 14), so liegt der augenblickliche Drehpol 12 im Schnitt des in A_1 auf S_2 errichteten Lotes mit der durch B_2 gehenden Normalen zur Geraden b_1 . Die Bahn jedes weiteren Punktes C_2 des Stabes S_2 ist dann eine (gewöhnliche) Konchoide der Geraden b_1 . Die Bahnen der außerhalb des Stabes S_2 liegenden Punkte der bewegten Systemebene heißen schiefe Konchoiden.

Die Bewegung des Stabes S_2 , der in einer um den Punkt A_1 drehbaren Hülse verschiebbar gelagert ist, denken wir uns dadurch mechanisch hervorgebracht, daß wir an ihm im Punkte $B_2 = 23$ normal zur Geraden b_1 einen weiteren Stab S_3 gelenkig anschließen, der in der Richtung der Geraden b_1 verschoben wird. Der Drehpol 13 fällt sodann dauernd in den Fernpunkt der Geraden S_3 .

Um daraus ein Getriebe zu erhalten, das den Drehpol 12 mechanisch erzeugt, bringen wir noch einen Stab S_4 an, der sich ebenfalls auf den Punkt A_1 stützt und zu S_2 ständig normal bleibt, während ein fester Punkt P_4 des Stabes S_4 gezwungen wird, auf S_3 zu gleiten. Der Punkt P_4 deckt sich also immer mit dem jeweiligen Drehpol 12 und beschreibt somit in den Systemebenen S_1 und S_2 die Polbahnen ihrer gegenseitigen Bewegung.

Aus der Art der Verbindung des Stabes S_4 mit den Systemen S_1 , S_2 und S_3 ergibt sich, daß der Drehpol 14 auf der Geraden $g_{14} = S_2$, der Drehpol 34 auf der durch den Punkt P_4 zu S_3 gezogenen Normalen g_{34} und da die gegenseitige Bewegung der Systeme S_2 und S_4 eine Schiebung ist, der Drehpol 24 auf der Ferngeraden $g_{24} \infty$ liegen muß. Die Polfigur der hier betrachteten Zwanglaufkette läßt sich nicht durch bloßes Ziehen von Polgeraden herstellen.

¹¹ Ein solcher Mechanismus, dessen Polfigur nur ausgeartet ist, wenn der beschreibende Punkt in einen Hauptscheitel der Ellipse gelangt, ist in der in Fußnote 1 genannten Arbeit beschrieben. Bei diesem Mechanismus erfordert also nur die Ermittlung der Hauptscheitelkrümmung die Verwendung eines kinematisch äquivalenten Polplanes. Für die Nebenscheitel ergibt sich wieder dieselbe einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes wie oben.

Allgemein gilt: Kennt man von den drei Systemen S_1, S_2 und S_3 einer viergliedrigen ebenen kinematischen Kette die gegenseitigen Drehpole 12, 13 und 23 und ist ferner noch bekannt, daß die Drehpole 14, 24, 34 dieser drei Systeme in bezug auf das System S_4 auf den Geraden g_{14}, g_{24} bzw. g_{34} liegen, so kann man, wenn eine dieser Geraden die Ferngerade ist, eine kinematisch äquivalente Polfigur zur Vervollständigung des ursprünglichen Drehpolplanes heranziehen. Man wähle dazu die Projektionsstrahlenrichtung parallel zu einer der beiden anderen Geraden.

In Abb. 14 ist g_{24} die Ferngerade. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden kinematisch äquivalenten Drehpolpläne wurden parallel zu g_{34} angenommen. Zur Vereinfachung der Konstruktion wurde dabei der Drehpol (34) im besonderen noch im Schnittpunkt der Geraden g_{14} und g_{34} gewählt und die Drehpole 12, 13 ∞ , 23 des ursprünglichen Drehpolplanes unverändert in den kinematisch äquivalenten übernommen.¹²

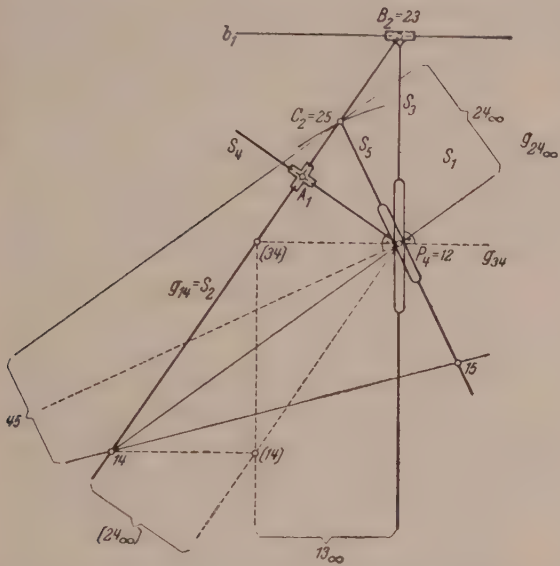


Abb. 14. Krümmungskreiskonstruktion für die Konchoide einer Geraden mittels des Drehpolplanes eines Krümmungsmechanismus mit teilweiser Verwendung einer dazu kinematisch äquivalenten Polfigur.

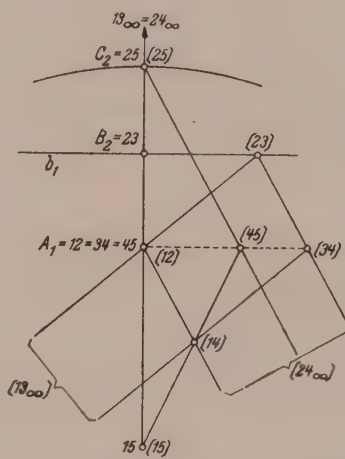


Abb. 15. Bestimmung der Scheitelkrümmung der Konchoide einer Geraden mittels einer zu einem ausgearteten Drehpolplan kinematisch äquivalenten Polfigur.

Der Drehpol (24) ist dann der Fernpunkt des Polstrahls 23—(34). Der Drehpol (14) ergibt sich nun als Schnittpunkt der Polgeraden 12—(24 ∞) und 13 ∞ —(34). Hierauf findet man den Drehpol 14 des ursprünglichen Polplanes im Schnitt der Geraden g_{14} mit dem Projektionsstrahl, der durch (14) parallel zu g_{34} verläuft. Der Drehpol 24 ist sodann der Fernpunkt der Polgeraden 12—14.

Für die Konstruktion des Krümmungskreises der von C_2 beschriebenen Konchoide c_1 ist nun noch der Stab S_5 erforderlich, der in $C_2 = 25$ drehbar an S_2 angeschlossen ist und den Punkt $P_4 = 12$ dauernd zum Stützpunkt hat.

Der Drehpol 45 ist demnach der Schnittpunkt des in P_4 auf S_5 errichteten Lotes mit der Polgeraden 24 ∞ —25. Der Stab S_5 des hier verwendeten Mechanismus fällt

¹² Die Konstruktion der kinematisch äquivalenten Polfigur läßt sich in diesem Fall auch als perspektiv-affine Umformung der gegebenen Polfigur auffassen, mit der Affinitätsachse 23—12—13 ∞ und Affinitätsstrahlen parallel zu g_{34} .

Ist keine der Geraden g_{14}, g_{24}, g_{34} die Ferngerade, so kann man mit einer kollinearen Umformung des Drehpolplanes zum Ziele gelangen.

während der ganzen Bewegung stets in die Kurvennormale der von C_2 durchlaufenen Punktbahn. Der Stab S_5 rollt somit auf der in S_1 gelegenen Evolute c_1' der Konchoide c_1 ab. Deshalb ist der Drehpol 15, der im Schnitt der Polstrahlen 12—25 und 14—45 liegt, als Berührungspunkt der Kurvennormalen S_5 mit der Evolute c_1' , der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt C_2 der Konchoide.¹³

Gelangt C_2 in einen Scheitel der Konchoide (Abb. 15), so ergeben sich auf ihrer Symmetrieachse die Drehpole $12=34=45 = A_1$, $23 = B_2$, $25 = C_2$ und $13 \infty = 24 \infty$. Für eine mit dieser ausgearteten Polfigur kinematisch äquivalente können nach Satz 3 vier Drehpole, von denen keine drei in gerader Linie liegen, etwa (12), (23), (24) und (25), beliebig gewählt werden.¹⁴

Ist die Grundkurve b_1 der Konchoide nicht eine Gerade, sondern eine beliebige Kurve, so kann man auch die Krümmung dieser allgemeinen Konchoide mit Hilfe des in Abb. 14 dargestellten Mechanismus ermitteln, wenn man den Stab S_3 auf der Evolute b_1' von b_1 so abrollen läßt, daß dabei das Gelenk B_2 in S_1 die gegebene Kurve b_1 beschreibt.

Es gibt auch noch andere Getriebe, die dasselbe leisten wie das vorhin beschriebene und die im allgemeinen zu anderen Krümmungskonstruktionen der Konchoide führen.

Der Krümmung der Konchoiden kommt im Maschinenbau praktische Bedeutung zu bei der Untersuchung der Krümmungsverhältnisse von Nockenprofilen für Steuerungen.

8. Zusammenfassung.

Die Verwertung des neuen Begriffs der „kinematischen Äquivalenz von Polfiguren“ ermöglicht die rein konstruktive Behandlung eines Getriebes mit Hilfe seines Drehpolplanes auch für jene Sonderfälle, in denen die bekannten Verfahren versagen. Dieses Versagen hängt mit dem Zusammenfallen von Polgeraden in gewissen Sonderlagen des Getriebes zusammen, denen aber meistens sogar eine außerordentliche praktische Bedeutung zukommt.

Die Verwendung und der Nutzen von Drehpolplänen, die zu einem ausgearteten Drehpolplan kinematisch äquivalent sind, werden an Hand von Mechanismen für die Krümmungsermittlung ebener Kurven (Krümmungsmechanismen) dargetan. Damit ist zugleich gezeigt, daß ein früher aufgestelltes Konstruktionsprinzip zur Bestimmung der Krümmung von ebenen Kurven ausnahmslos anwendbar ist,¹ das sich insbesondere zu einer einheitlichen Ermittlung der für die Getriebelehre wichtigen Krümmung von Punktbahnen, Hüllbahnen und Polbahnen mit Vorteil anwenden läßt.

¹³ K. Federhofer: Zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven, S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **135**, S. 82—86 (1926), gelangt mit Hilfe der Subnormalkurve zu einer anderen einfachen Krümmungskonstruktion der Konchoiden.

¹⁴ H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, S. 68, Leipzig, 1908 (Sammlung Schubert, Bd. LVI) und Th. Schmid: Darstellende Geometrie, Bd. I, 3. Aufl., S. 157, Berlin und Leipzig, 1922 (Sammlung Schubert, Bd. LXV), berechnen den Scheitelkrümmungshalbmesser und legen die erhaltene Formel der Konstruktion zugrunde.

(Eingegangen am 2. Mai 1947.)

Über die Bestimmung der Permeabilität von plattenförmigen Materialien im Zentimeter-Wellengebiet.

Von E. Ledinegg, Graz.

Zusammenfassung. Die bisher übliche Methode zur experimentellen Bestimmung der Permeabilität μ im Zentimeter-Wellenbereich mittels einer konzentrischen Lecher-Leitung versagt im Bereich kleiner μ -Werte. Das hier geschilderte Hohlraummeßverfahren gestattet dagegen die genaue Bestimmung der Permeabilität von kreisplattenförmigen Proben auch im genannten Bereiche.

Summary. The usual method for experimental determination of permeability (μ) by concentric Lecher-conduction fails for small μ -values. The cavity-measure-method described herein, permits the exact determination of the permeability of circular, plate-shaped samples in the named region.

Résumé. La méthode de mesure usuelle pour déterminer la perméabilité dans le domaine des ondes centimétriques, au moyen de conducteurs en forme de tuyaux concentriques, ne s'applique plus pour les valeurs très faible de la perméabilité. Le procédé ici décrit et qui utilise une cavité percée dans le conducteur permet par contre une détermination précise de la perméabilité, même dans le domaine ci-dessus envisagé.

Die experimentelle Bestimmung der Permeabilität wird im Gebiete der Zentimeterwellen in üblicher Weise mittels einer konzentrischen Lecher-Leitung (Innenradius r , Außenradius R) durchgeführt. Die Proben sind kreiszylinderförmig (Außenradius R) und besitzen eine entsprechende zentrische Bohrung (mit dem Radius r), um auf den Innenleiter aufgesetzt werden zu können. Aus der durch die Einführung des Meßkörpers entstehenden Änderung des elektromagnetischen Feldes kann dann mit Hilfe der Leitungsgleichungen die Permeabilität $\mu \mu_0$ (μ_0 = Permeabilität des Äthers in praktischen Einheiten) berechnet werden. Zur Durchführung der Messungen stehen zwei prinzipiell verschiedene Verfahren zur Verfügung: die „Abtastmethode“ und die „Resonanzmethode“. Bei Anwendung des ersteren Verfahrens wird bei fester Frequenz des erregenden Senders mittels einer Sonde, welche in die Lecher-Leitung hereinragt, die „Knotenverschiebung“ des elektrischen Feldes sowie das Verhältnis $\mathcal{E}_{\max}/\mathcal{E}_{\min}$ (oder auch die „Knotenbreite“) gemessen, während bei dem Resonanzverfahren die Resonanzfrequenz ω der Lecher-Leitung mit und ohne Probe gemessen wird (zur Bestimmung des „Verlustwinkels“ kommt noch die Messung der Halbwertsbreite der Resonanzkurve dazu), woraus sich in beiden Fällen μ berechnen läßt. Wie im folgenden kurz begründet wird, versagen jedoch die angeführten Methoden bei kleineren μ -Werten.

1. Abtastmethode.

Hier wird aus der gemessenen Knotenverschiebung, welche durch Einführung der Probe entsteht, sowie der Knotenbreite aus langen, wenig übersichtlichen Formelreihen die Permeabilität berechnet. Ist nun der Meßkörper nicht genügend lang und μ klein, so fällt die Knotenverschiebung so gering aus, daß daraus eine genaue μ -Bestimmung nicht ohne weiteres möglich ist. Wird dagegen die Probenlänge zur Erzielung einer meßbaren Knotenverschiebung entsprechend groß gewählt, so liefern die Formeln wegen der auftretenden dielektrischen Verluste, welche die Knotenverschiebung mitbestimmen, trotzdem ein ungenaues Ergebnis.

2. Resonanzmethode.

Bei dem Resonanzverfahren ergibt zwar die Theorie zur Berechnung von μ eine bequeme Bestimmungsgleichung (Eigenwertgleichung) von der Form

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l - h) = - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon \mu} h. \quad (1a)$$

$\varepsilon \varepsilon_0$ = Dielektrizitätskonstante in praktischen Einheiten (ε_0 = Dielektrizitätskonstante des Äthers), h = Länge der Probe, l = Gesamtlänge der Leitung, λ = Resonanzwellenlänge der Leitung mit Probe, λ_0 = Resonanzwellenlänge der Leitung ohne Probe, welche für $h/\lambda \ll 1$ in

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = (\mu - 1) \frac{h}{l} \quad (1b)$$

übergeht, doch sind es hier vor allem konstruktive Schwierigkeiten, welche dieses Verfahren für die Meßpraxis wenig geeignet erscheinen lassen. Während bei der Abtastmethode die Eigendämpfung der Lecher-Leitung keine wesentliche Rolle spielt, ist es hier, wie bei jedem Resonanzverfahren, von großer Bedeutung, die Dämpfung des Resonators möglichst klein zu halten, um eine genügend große Resonanzamplitude bei extrem schwacher Kopplung zu erreichen.¹ Obwohl theoretisch kein Hindernis besteht, durch passende Wahl von r , R , l den geforderten hohen Gütefaktor herzustellen, wird es in Praxis bei der konstruktiven Durchbildung der Lecher-Leitung, welche eine handliche Auswechselbarkeit der Proben zu berücksichtigen hat, wegen des Auftretens hoher Stromdichten an den Übergangsstellen zwischen den Stirnflächen der Leitung und dem Innenleiter kaum möglich sein, dem theoretischen Wert der Dämpfung nahezukommen.

Diese eben angeführten Mängel führten in neuerer Zeit dazu, Hohlräume ohne Innenleiter zu benützen, welche den gestellten meßtechnischen Anforderungen weitaus besser entsprechen. Z. B. wurden von F. Borgnis kreiszylindrische Resonatoren zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von stäbchenförmigen Proben verwendet,² welcher Methode später ein analoges Verfahren mit plattenförmigen Proben^{3, 4} zur Seite gestellt wurde.

Es war naheliegend, auch zur experimentellen Bestimmung der Permeabilität ein Resonanzverfahren mittels Resonatoren ohne Innenleiter zu entwickeln, was vom Verfasser für kreisplattenförmige Proben durchgeführt wurde. Nachstehend werden die theoretischen Grundlagen dazu kurz abgeleitet.

Gegeben ist ein kreiszylindrischer Topf (Höhe l , Radius R), in welchem eine plattenförmige Probe mit den Materialkonstanten ε , μ und der Höhe h eingebracht ist. Dann folgt aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} = i \omega \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E} = i \omega \vartheta,$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -i \omega \mu \mu_0 \mathfrak{H},$$

eine Darstellung für die elektrische und die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H} = i \omega \text{rot } U \mathbf{e}_1,$$

$$\vartheta = k_0^2 \varepsilon \mu U \mathbf{e}_1 + \text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} U \right).$$

Dabei ist U für den Raum I (ohne Probe) bzw. Raum II (mit Probe) mit

$$U_{\text{I}} = J_0 (\beta_v r) \cos \gamma_{\text{I}} x_1, \quad U_{\text{II}} = c \cdot J_0 (\beta_v r) \cos \gamma_{\text{II}} (x_1 - l)$$

gegeben. Die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche beider Räume führt zur Eigenwertgleichung

¹ Die Eigenwertgleichung (1a) oder (1b) gilt nur beim Kopplungsgrade 0 (abgeschlossenes System) strenge und ist bei extrem schwacher Kopplung in sehr guter Näherung erfüllt.

² F. Borgnis: Physik. Z. **43**, 284 (1942).

³ E. Ledinegg: Naturwiss. **31**, H. 47/48 (1943).

⁴ E. Ledinegg: Zur Störungsrechnung elektromagnetischer Hohlräume mit einigen Anwendungen auf die experimentelle Bestimmung der Dielektrizitätskonstante im Zentimeter-Wellengebiet.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \gamma_{\text{I}} \operatorname{tg} \gamma_{\text{I}} (l - h) &= \gamma_{\text{II}} \operatorname{tg} \gamma_{\text{II}} h, \\ \gamma_{\text{I}} &= \sqrt{\beta_v^2 - k_0^2}, \\ \gamma_{\text{II}} &= \sqrt{\varepsilon \mu k_0^2 - \beta_v^2}; \quad \beta_v = \frac{y_{0,v}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Daraus läßt sich μ (bei bekanntem ε) berechnen, wenn $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ durch eine Messung bestimmt wurde. Für dünne Platten ergibt sich aus Gl. (2a) eine für Meßzwecke bequeme Formel:

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_{\text{I}} \frac{\operatorname{tg} \gamma_{\text{I}} (l - h)}{k_0^2 h} \approx \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0} \frac{l}{h}. \quad (2b)$$

Der in (2a) oder (2b) vorkommende ε -Wert ist leicht aus einer zweiten Messung — etwa nach dem in (2) angegebenen Verfahren — zu bestimmen.

Es sei bemerkt, daß man Gl. (2b) auch auf ganz andere Weise ableiten kann. Wendet man nämlich die Störungsrechnung auf die den Maxwell'schen Gleichungen äquivalente Gleichung $\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{E} \right) - \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mathfrak{E} = 0$ an,⁴ so ergibt sich für die durch Einbringung einer dünnen Platte hervorgerufene Änderung der Wellenlänge $\lambda - \lambda_0 = \delta\lambda$ der Ausdruck:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \int_V (\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_0^*) d\tau + (\mu - 1) \mu_0 \int_V (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0^*) d\tau}{2 \varepsilon_0 \int_V (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0^*) d\tau}. \quad (2c)$$

Dabei bedeuten \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , \mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0 die elektromagnetischen Feldvektoren des gestörten bzw. ungestörten Feldes, \mathfrak{E}_0^* , \mathfrak{H}_0^* die zu \mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0 konjugiert komplexen Größen und V das Hohlraumvolumen, ΔV das Volumen des im Hohlraum befindlichen Meßkörpers. Da

$$\int_V \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0^*) d\tau = \int_V \mu_0 (\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_0^*) d\tau$$

ist und im Inneren der Platte näherungsweise $\varepsilon \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ gilt, folgt aus (2c), wie unmittelbar ersichtlich, die Formel (2b).

Die praktische Erprobung der Gl. (2a) bzw. (2b) wurde mit einer unter (2) geschilderten Apparatur an einigen Materialien durchgeführt.

(Eingegangen am 16. August 1947.)

Auswertung von Stoßmessungen mittels Laplace-Transformation.

Von G. Heinrich, Wien.

Zusammenfassung. Mißt man den zeitlichen Verlauf eines Beschleunigungsvorganges mit Hilfe eines Beschleunigungsmessers beliebiger Bauart, so ist die vom Apparat gelieferte Beschleunigungskurve im allgemeinen verfälscht. Bei zeitlich begrenzten Vorgängen kann man eine Rektifikation durchführen, indem man die abklingende Kurve heranzieht, die der Apparat nach Einwirkung eines möglichst kurzen, unelastischen Stoßes normierter Größe aufzeichnet. Der dabei verwendete Zusammenhang wird durch eine Integralgleichung vom Volterra'schen Typ geliefert, deren Lösung nach der Methode der Laplace-Transformation durchgeführt wird. Daraus wird ein graphisches Verfahren entwickelt, das die Durchführung der Rektifikation ermöglicht.

Summary. If the temporal course of an acceleration is measured with an accelerometer of any type, the acceleration curve will generally not be quite correct. In case of temporally limited phenomena, a rectification of the curve is possible by using the damping curve that is obtained from the apparatus after a very short unelastic shock of fixed intensity. The influence of the latter is accounted for by an integral equation of the Volterra type, which can be solved by using of the Laplace transformation. A graphical method is thereby developed which makes rectification possible.

Résumé. Si l'on mesure l'allure générale dans le temps d'une accélération à l'aide d'un accéléromètre de type quelconque, la courbe d'accélération fournie par l'appareil est généralement altérée. Une rectification est possible lorsqu'il s'agit de phénomènes limités dans le temps, en utilisant la courbe décroissante que l'appareil enregistre après un choc très inélastique et très court, d'une intensité déterminée. La relation utilisée est fournie par une équation intégrale du type de Volterra, dont la solution s'obtient par la méthode de transformation de Laplace. Un procédé graphique en est développé, qui rend possible la rectification.

Bei der Messung von Stoßvorgängen durch einen Beschleunigungsmesser beliebiger Konstruktion stimmt bekanntlich die vom Instrument gelieferte Beschleunigungs-Zeit-Kurve nicht genau mit der tatsächlichen überein, da der Meßapparat selbst, durch seine Trägheit und seine Tendenz, Eigenschwingungen auszuführen, die zu messende Beschleunigung verzerrt wiedergibt.

Im folgenden soll ein Verfahren angegeben werden, das es ermöglicht, aus der vom Apparat aufgezeichneten Stoßkurve die tatsächliche Beschleunigungs-Zeit-Linie zu ermitteln, ohne auf die spezielle Theorie des Meßinstrumentes eingehen zu müssen. Als „Stoßkurve“ kann hierbei jede Beschleunigungs-Zeit-Kurve angesehen werden, die im Endlichen beginnt und endigt. Für sehr lange Kurvenzüge wird das Verfahren allerdings zeitraubend.

Die einzige Voraussetzung, die an die Wirkungsweise des Beschleunigungsmessers geknüpft werden muß, besteht in der Forderung, daß die tatsächliche und die gemessene Beschleunigung durch eine lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung zusammenhängen, die die Zeit t als unabhängige Variable enthält. Ein Instrument, das merklich von dieser Forderung abweicht, wäre als Beschleunigungsmesser überhaupt ungeeignet.

Es sei $\Phi(t)$ die vom Instrument bei der Stoßmessung aufgezeichnete Kurve. Wir führen noch eine zweite, normierte Stoßmessung aus, indem wir unser Instrument aus dem Zustand der Ruhe durch einen unelastischen Stoß plötzlich auf die gleichbleibende Geschwindigkeit Eins bringen. Bei diesem Einheitsstoß zeichnet das Instrument die Kurve $\varphi(t)$ auf. $\varphi(t)$ ist ein Charakteristikum für den Meßapparat und reicht, wie gezeigt werden soll, vollkommen aus, um aus der Kurve $\Phi(t)$ den tatsächlichen Beschleunigungs-Zeit-Verlauf $B(t)$ zu entwickeln.

Ist nämlich $B(\tau)$ die tatsächliche Beschleunigung zur Zeit τ , so ist $B(\tau) \cdot d\tau$ die Geschwindigkeitsänderung bzw. der Beschleunigungsstoß im Zeitraum $d\tau$. Würde nur dieser unendlich kleine Stoß erfolgen, so würde unser Apparat zufolge seines linearen Verhaltens die Kurve $B(\tau) \cdot d\tau \cdot \varphi(t - \tau)$ aufschreiben, die natürlich erst im Zeitpunkt $t = \tau$ beginnt. Aus der Linearität der Differentialgleichung, die die Aufzeichnung des Meßinstrumentes festlegt, folgt aber die unbegrenzte Überlagerungsfähigkeit der einzelnen Teillösungen. Man erhält also $\Phi(t)$ durch Summation über alle Teilstöße in der Form:

$$\Phi(t) = \int_0^t B(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) \cdot d\tau. \quad (1)$$

Durch (1) ist $\Phi(t)$ quellenmäßig dargestellt, wobei der Stoßbeginn zur Zeit $t = 0$ erfolgt.

Da $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ bekannt sind, liegt die Aufgabe vor, $B(t)$ aus Gl. (1) zu ermitteln. Gl. (1) stellt nun für die unbekannte Funktion $B(t)$ eine Integralgleichung vom Volterraschen Typ mit dem Kern $\varphi(t - \tau)$ dar.

Ihre Lösung kann nach der Methode der Laplace-Transformation durchgeführt werden.¹ Durch Anwendung der Laplace-Transformation auf die Funktionen $\Phi(t)$, $\varphi(t)$ und $B(t)$ gehen wir zu den zugehörigen Unterfunktionen über und schreiben:

¹ Vgl. K. W. Wagner: Operatorenrechnung. Leipzig: J. A. Barth. 1940.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L} \Phi(t) &= p \int_0^{\infty} \Phi(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = f_1(p), \\ \mathfrak{L} \varphi(t) &= p \int_0^{\infty} \varphi(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = f_2(p), \\ \mathfrak{L} B(t) &= p \int_0^{\infty} B(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = f_3(p). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Da das Integral (1) die Form eines Faltungsproduktes besitzt, kann man (1) auch schreiben:

$$\Phi(t) = B(t) * \varphi(t). \quad (1a)$$

Mit Gl. (1a) führen wir gleichfalls eine Laplace-Transformation aus und benutzen die Faltungsregel:²

$$\mathfrak{L} \{B(t) * \varphi(t)\} = \frac{\mathfrak{L} B(t) \cdot \mathfrak{L} \varphi(t)}{p}. \quad (3)$$

Man erhält also bei Beachtung von (2):

$$f_1(p) = \frac{f_2(p) \cdot f_3(p)}{p}. \quad (4)$$

Gl. (4) kann man leicht nach der unbekannten Unterfunktion $f_3(p)$ auflösen und erhält:

$$f_3(p) = \frac{p \cdot f_1(p)}{f_2(p)}. \quad (4a)$$

Durch Anwendung der inversen Laplace-Transformation \mathfrak{L}^{-1} auf (4a) kehren wir zu den Oberfunktionen zurück. Es gilt allgemein:

$$\mathfrak{L}^{-1} f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f(p)}{p} e^{pt} \cdot dp. \quad (5)$$

Man erhält also aus (4a):

$$\mathfrak{L}^{-1} f_3(p) = B(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f_1(p)}{f_2(p)} e^{pt} \cdot dp. \quad (6)$$

Bei Beachtung der Gl. (2) erhält man aus (6):

$$B(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-p\tau} \cdot d\tau}{\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot e^{-p\sigma} \cdot d\sigma} \cdot e^{pt} \cdot dp, \quad (7)$$

wobei τ und σ als Integrationsvariable dienen.

Gl. (7) stellt bereits die Lösung der Volterraschen Integralgleichung (1) dar. Die Integration nach p verläuft hierbei längs der imaginären p -Ebene, wobei alle auf dieser Achse gelegenen singulären Punkte durch kleine Halbkreise umgangen werden müssen, die sich in die positive Halbebene von p erstrecken.

Die physikalische Bedeutung der Integrale, die im Integranden von (7) aufscheinen, ergibt sich aus dem Fourierschen Integralsatz. Darnach gilt:

² Wagner: l. c. S. 62.

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau,$$

oder, da Φ für negative Argumente verschwindet,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot d\omega \int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau. \quad (8)$$

Da auch φ für negative Argumente verschwindet, erhält man analog:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot e^{-i\omega\sigma} \cdot d\sigma. \quad (9)$$

Dies läßt sich bekanntlich als spektrale Zerlegung der Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ deuten, wobei die Amplitude der harmonischen Schwingung, deren Kreisfrequenz zwischen ω und $\omega + d\omega$ liegt, durch den Betrag von

$$\frac{1}{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot e^{-i\omega\sigma} \cdot d\sigma$$

gegeben ist. Ersetzt man demnach in (7) p durch $i\omega$, so erkennt man, daß der Ausdruck

$$\frac{\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau}{\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot e^{-i\omega\sigma} \cdot d\sigma}$$

das Verhältnis der komplexen Amplituden darstellt, die bei der spektralen Zerlegung der Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ dem Frequenzintervall ω und $\omega + d\omega$ zugeordnet sind. Gl. (7) geht dann über in:

$$B(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot d\omega \frac{\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau}{\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot e^{-i\omega\sigma} \cdot d\sigma}. \quad (7a)$$

Aus (7a) erkennt man nun, daß die komplexe Amplitude der Spektralzerlegung der Funktion $B(t)$ mit dem Verhältnis der komplexen Amplituden der spektralen Zerlegung der Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ übereinstimmt.

Es gilt also für alle Frequenzen ω :

$$\int_0^{\infty} B(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt = \frac{\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau}{\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot e^{-i\omega\sigma} \cdot d\sigma}. \quad (7b)$$

Durch Bezug auf die Amplituden der spektral zerlegten Apparatfunktion $\varphi(t)$ werden also die spektralen Amplituden der vom Instrument aufgezeichneten Stoßkurve entzerzt und man erhält so die spektralen Amplituden der tatsächlichen Beschleunigungskurve.

Zur praktischen Auswertung der Formel (7a) muß man allerdings zu einer reellen Form übergehen. Zu diesem Zweck führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\tau = \Theta_1(\omega), \quad (8a)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cdot \sin \omega \tau \cdot d\tau = \Theta_2(\omega), \quad (8b)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot \cos \omega \sigma \cdot d\sigma = \vartheta_1(\omega), \quad (8c)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma) \cdot \sin \omega \sigma \cdot d\sigma = \vartheta_2(\omega). \quad (8d)$$

Durch Anwendung der Eulerschen Formel auf (7a) erhält man dann:

$$B(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\Theta_1 \vartheta_1 + \Theta_2 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \cos \omega t + \frac{\Theta_2 \vartheta_1 - \Theta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \sin \omega t \right\} d\omega \\ + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\Theta_1 \vartheta_2 - \Theta_2 \vartheta_1}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \cos \omega t + \frac{\Theta_1 \vartheta_1 + \Theta_2 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \sin \omega t \right\} d\omega.$$

Nun sind Θ_1 und ϑ_1 gerade, Θ_2 und ϑ_2 ungerade Funktionen von ω . Es verschwindet daher der imaginäre Teil von $B(t)$, da der Integrand eine ungerade Funktion von ω ist, während man sich beim reellen Teil wegen des geraden Integranden auf das Integrationsintervall 0 bis ∞ beschränken kann. Man erhält demnach:

$$B(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\Theta_1 \vartheta_1 + \Theta_2 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \cos \omega t + \frac{\Theta_2 \vartheta_1 - \Theta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \sin \omega t \right\} d\omega. \quad (9)$$

Gl. (9) kann man leicht auf die Form bringen:

$$B(t) = \int_0^{\infty} A \cdot \cos(\omega t - \varepsilon) \cdot d\omega \quad (10)$$

mit:

$$A = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\Theta_1^2 + \Theta_2^2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}} \quad (10a)$$

und:

$$\varepsilon = \arctg \frac{\Theta_2 \vartheta_1 - \Theta_1 \vartheta_2}{\Theta_1 \vartheta_1 + \Theta_2 \vartheta_2} = \arcsin \frac{\Theta_2 \vartheta_1 - \Theta_1 \vartheta_2}{\sqrt{(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)}}. \quad (10b)$$

Die Darstellung mit dem Arcussinus wurde beigelegt zwecks eindeutiger Festlegung von ε im Intervall von 0 bis 2π .

Man kann A als Amplitudenfunktion und ε als Phasenfunktion bezeichnen. $A \cdot d\omega$ bedeutet die reelle Amplitude des Spektrums von $B(t)$ für eine Teilschwingung des Frequenzintervalls zwischen ω und $\omega + d\omega$. Meist interessiert bei einem Stoß gerade die Amplitudenfunktion A , denn man will oft wissen, welche Frequenzen mit besonders starker Amplitude auftreten und welche Frequenzen gar nicht oder nur mit geringer Amplitude vorkommen. Darüber gibt Gl. (10a) bereits erschöpfende Auskunft. Die Phasenfunktion interessiert hingegen in der Regel nicht,

Es ist nun die Frage, wie man aus den zeichnerisch vorliegenden Kurven $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ ohne großen Zeitaufwand die Funktionen Θ_1 , Θ_2 , ϑ_1 und ϑ_2 erhält, die in A vorkommen.

Hierfür kann man sich mit Vorteil eines Produktintegrappen bedienen, von dem es mehrere Systeme gibt.³ Er erlaubt eine rasche Ausführung des Integrals

$$\int_0^x \varphi_1(\xi) \cdot \varphi_2(\xi) \cdot d\xi, \text{ wenn } \varphi_1(\xi) \text{ und } \varphi_2(\xi) \text{ gezeichnet vorliegen. Die Integrale (8a),}$$

(8b), (8c) und (8d) sind von dieser Art. Nur genügt natürlich nicht eine einmalige Integration, denn man braucht diese Größen für alle möglichen Werte von ω . Man wird also die Integration für diskrete Werte von ω durchführen und die so erhaltenen Werte in einem Diagramm durch eine Kurve verbinden, wobei man als Abszisse die Kreisfrequenz ω verwendet. Um nicht jedesmal eine neue Sinuslinie zeichnen zu müssen, kann man die Sinuslinien optisch projizieren und die Variation von ω durch Anwendung verschiedener Vergrößerungen (erzeugt durch Entfernungsänderung des Projektionsapparates) bewerkstelligen. Es ist zu bedenken, daß die Funktionen ϑ_1 und ϑ_2 nach (8c) und (8d) nur vom Meßapparat abhängen und daher nur einmal ermittelt werden brauchen. Θ_1 und Θ_2 nach (8a) und (8b) müssen allerdings für jede Stoßmessung neu bestimmt werden. Damit liegt dann die Amplitudenfunktion A nach (10a) fest.

Will man die Funktion $B(t)$ selbst haben, geht man am besten von Gl. (9) aus. Man zeichnet sich zuerst die Ausdrücke:

$$\frac{\Theta_1 \vartheta_1 + \Theta_2 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \text{ und } \frac{\Theta_2 \vartheta_1 - \Theta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}$$

als Funktion von ω auf und führt dann, analog wie früher, für verschiedene diskrete Werte von t die Integration mit dem Produktintegrappen durch. Die einzelnen Punkte verbindet man durch eine Kurve mit der Abszisse t , die die gesuchte Stoßkurve darstellt.

Eine andere Möglichkeit für eine graphische Auswertung der aufgenommenen Kurven $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ besteht darin, daß man von der der Laplace-Transformation zugrunde liegenden Fourierschen Integraldarstellung näherungsweise zu einer Darstellung durch Fouriersche Reihen mit großer Grundperiode übergeht.

Zu diesem Zweck wählen wir als Grundperiodendauer eine Zeit T , die größer ist als die Zeitdauer, während welcher die abklingenden Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ merklich von Null verschiedene Werte durchlaufen. Wir ersetzen dann die kontinuierlich-veränderliche Kreisfrequenz ω durch die diskreten Werte $\frac{2\pi\nu}{T}$, wobei ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Ferner werden $d\omega$ durch $\frac{2\pi}{T}$ und das Integral nach ω durch eine Summe ersetzt.

Dann kann man statt (7a) näherungsweise schreiben:

$$B(t) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^T \Phi(\tau) \cdot e^{-i \frac{2\pi\nu}{T} \tau} \cdot d\tau}{\int_0^T \varphi(\sigma) \cdot e^{-i \frac{2\pi\nu}{T} \sigma} \cdot d\sigma} \cdot e^{i \frac{2\pi\nu}{T} t}. \quad (11)$$

³ F. A. Willers: Mathematische Instrumente. Berlin: R. Oldenburg. 1943.

Entwickelt man anderseits die Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ im Intervall von Null bis T nach Fourierschen Reihen gemäß den Ansätzen:

$$\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{i \frac{2\pi\nu}{T} t}, \quad (12)$$

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i \frac{2\pi\nu}{T} t}, \quad (13)$$

so erhält man hieraus:

$$\int_0^T \Phi(\tau) \cdot e^{-i \frac{2\pi\nu}{T} \tau} \cdot d\tau = T \cdot A_\nu, \quad (12a)$$

$$\int_0^T \varphi(\sigma) \cdot e^{-i \frac{2\pi\nu}{T} \sigma} \cdot d\sigma = T \cdot a_\nu, \quad (13a)$$

so daß (11) übergeht in:

$$B(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\nu}{a_\nu} e^{i \frac{2\pi\nu}{T} t}. \quad (11a)$$

Um zu einer reellen Darstellung zu gelangen, setzen wir:

$$A_\nu^{(1)} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(\tau) \cdot \cos \frac{2\pi\nu}{T} \tau \cdot d\tau, \quad (12b)$$

$$A_\nu^{(2)} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(\tau) \cdot \sin \frac{2\pi\nu}{T} \tau \cdot d\tau, \quad (12c)$$

$$a_\nu^{(1)} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\sigma) \cdot \cos \frac{2\pi\nu}{T} \sigma \cdot d\sigma, \quad (13b)$$

$$a_\nu^{(2)} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\sigma) \cdot \sin \frac{2\pi\nu}{T} \sigma \cdot d\sigma. \quad (13c)$$

Dann wird aus (11a):

$$B(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\nu^{(1)} - i A_\nu^{(2)}}{a_\nu^{(1)} - i a_\nu^{(2)}} e^{i \frac{2\pi\nu}{T} t}. \quad (11b)$$

In Gl. (11b) kann man leicht durch Zusammenfassen der Glieder mit entgegengesetzt gleichen Indizes zu einer reellen Form gelangen:

$$B(t) = \frac{1}{T} \frac{A_0^{(1)}}{a_0^{(1)}} + \frac{2}{T} \sum_1^\infty \frac{1}{a_\nu^{(1)2} + a_\nu^{(2)2}} \left\{ (A_\nu^{(1)} \cdot a_\nu^{(1)} + A_\nu^{(2)} \cdot a_\nu^{(2)}) \cos \frac{2\pi\nu}{T} t + \right. \\ \left. \pm (A_\nu^{(2)} \cdot a_\nu^{(1)} - A_\nu^{(1)} \cdot a_\nu^{(2)}) \sin \frac{2\pi\nu}{T} t \right\}, \quad (11c)$$

die man noch zu dem Ausdruck:

$$B(t) = \frac{1}{T} \frac{A_0^{(1)}}{a_0^{(1)}} + \frac{2}{T} \sum_1^\infty \sqrt{\frac{A_\nu^{(1)2} + A_\nu^{(2)2}}{a_\nu^{(1)2} + a_\nu^{(2)2}}} \times \\ \times \cos \left[\frac{2\pi\nu}{T} t - \arctg \frac{A_\nu^{(2)} \cdot a_\nu^{(1)} - A_\nu^{(1)} \cdot a_\nu^{(2)}}{A_\nu^{(1)} \cdot a_\nu^{(1)} + A_\nu^{(2)} \cdot a_\nu^{(2)}} \right] \quad (11d)$$

umgestalten kann.

Da durch den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ die Gl. (11), (11c) und (11d) wieder in die Gl. (7a), (9) und (10) übergehen, und da wegen des abklingenden Charakters der Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ für große Werte der Integrationsvariablen kein merklicher Beitrag zu den Integralen (8a), (8b), (8c) und (8d) mehr entsteht, ändern sich die Ausdrücke (11c) und (11d) für genügend große Werte von T praktisch nicht mehr, wenn man T weiter anwachsen läßt. Die Ausdrücke sind dann von T in diesem Bereich nahezu unabhängig.

Man kann nun die Auswertung etwa nach (11d) vornehmen. Man benötigt hierzu einen harmonischen Analysator,³ mit dessen Hilfe man die Fourier-Koeffizienten der Kurven $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ nach (12b), (12c), (13b) und (13c) ermitteln kann. Aus (11d) kann man dann das Amplitudendiagramm ablesen, das nun die Form eines diskreten Linienspektrums mit den äquidistanten Abständen $\frac{2\pi}{T}$ (gemessen auf der ω -Achse) besitzt. Man kann aber natürlich die diskreten Punkte wieder zu einer kontinuierlichen Kurve verbinden und kommt so, bis auf einen konstanten Faktor, zu einer zu (10a) gleichwertigen Darstellung zurück. Durch Multiplikation mit $\frac{T}{2\pi}$ erhält man das genaue Äquivalent der Amplitudenfunktion:

$$A = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A_v^{(1)2} + A_v^{(2)2}}{a_v^{(1)2} + a_v^{(2)2}}} \quad (14)$$

Es sollen nun an Hand eines einfachen Beispiels die aufgefundenen Beziehungen veranschaulicht werden.

Unser Beschleunigungsmesser möge unter dem Einfluß eines Einheitsstoßes, der ihn aus der Ruhe auf die gleichbleibende Geschwindigkeit von 1 m/sec. bringt, die Kurve:

$$\varphi(t) = a_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sin k t \quad (15)$$

aufschreiben, worin a_0 , λ und k positive Konstante bedeuten. Es werde nun ein Beschleunigungsverlauf gemessen, der durch die Beziehung

$$B(t) = B_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad (16)$$

wiedergegeben werden kann, worin B_0 und α wieder positive Konstante bedeuten. Beide Funktionen erstrecken sich zwar ins Unendliche, sie werden aber praktisch bereits für entsprechend große, endliche Werte von t unmeßbar klein, so daß die eingangs geforderten Voraussetzungen erfüllt sind.

Bei der Messung der Stoßfunktion $B(t)$ schreibt der Beschleunigungsmesser nach Gl. (1) die Funktion:

$$\Phi(t) = \int_0^t B_0 e^{-\alpha \tau} \cdot a_0 \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \sin k(t-\tau) \cdot d\tau \quad (17)$$

auf. Die Ausführung der Integration liefert:

$$\Phi(t) = \frac{B_0 \cdot a_0}{(\lambda - \alpha)^2 + k^2} \left\{ k \cdot e^{-\alpha t} - [k \cos k t + (\lambda - \alpha) \sin k t] e^{-\lambda t} \right\}. \quad (17a)$$

Wir gehen nun von diesen beiden Funktionen $\varphi(t)$ und $\Phi(t)$ aus und rechnen daraus nach Gl. (7) die Beschleunigungsfunktion $B(t)$ aus. Dazu benötigen wir die Integrale

$$\int_0^\infty \Phi(\tau) \cdot e^{-p\tau} \cdot d\tau = \frac{B_0 \cdot a_0 \cdot k}{(\alpha + p)[(\lambda + p)^2 + k^2]} \quad (18)$$

und

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma) \cdot e^{-p\sigma} \cdot d\sigma = \frac{a_0 \cdot k}{(\lambda + p)^2 + k^2}. \quad (19)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (7) erhält man

$$B(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{B_0}{\alpha + p} e^{pt} dp. \quad (20)$$

Zur Berechnung dieses Integrals wenden wir den Cauchyschen Integralsatz längs eines geschlossenen Weges der komplexen p -Ebene an, der sich auf der imaginären Achse von $-iR$ bis $+iR$ und von dort über einen Halbkreis mit dem Radius R über die negative Halbebene zu $-iR$ zurück erstreckt. Die einzige singuläre Stelle $p = -\alpha$ schließen wir durch einen kleinen Kreis mit dem Radius r aus. Nach dem Cauchyschen Integralsatz muß das Integral über den Rand des gekennzeichneten Gebietes verschwinden. Macht man nun die Grenzübergänge $R \rightarrow \infty$ und $r \rightarrow 0$, so verschwindet, wie man leicht zeigen kann, das Integral über den großen Halbkreis und es wird daher das gesuchte Integral gleich dem Residuum an der Stelle $p = -\alpha$. Es ergibt sich also der richtige Wert: $B(t) = B_0 \cdot e^{-\alpha t}$.

Rechnet man die durch (8a), (8b), (8c) und (8d) definierten Größen aus, wobei man von (18) und (19) Gebrauch machen kann, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= B_0 a_0 k \frac{\alpha (\lambda^2 + k^2 + \omega^2) - 2 \lambda \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2) [(\lambda^2 + k^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2]}, \\ \Theta_2 &= B_0 a_0 k \frac{\omega (\lambda^2 + k^2 - \omega^2) + 2 \lambda \alpha \omega}{(\alpha^2 + \omega^2) [(\lambda^2 + k^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2]}, \\ \vartheta_1 &= \frac{a_0 k (\lambda^2 + k^2 - \omega^2)}{(\lambda^2 + k^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2}, \\ \vartheta_2 &= \frac{2 a_0 k \lambda \omega}{(\lambda^2 + k^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Amplitudenfunktion nach (10a):

$$A = \frac{1}{\pi} \frac{B_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad (21)$$

und für die Phasenfunktion nach (10b):

$$\varepsilon = \arctg \frac{\omega}{\alpha} = \arcsin \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}. \quad (22)$$

Wie es sein muß, kommen in diesen Ausdrücken die Apparatekonstanten a_0 , λ und k nicht mehr vor. Bestimmt man zur Kontrolle Amplituden- und Phasenfunktion direkt aus der Fourierschen Integraldarstellung für die Funktion $B(t)$, so erhält man ebenfalls die Werte (21) und (22).

Rechnet man anderseits nach der Formel (11d), so hat man die Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ im Intervall von Null bis T nach Fourierschen Reihen zu entwickeln. Für die Koeffizienten erhält man nach (12b), (12c), (13b) und (13c) für genügend große T :

$$\begin{aligned} A_{\nu}^{(1)} &= \frac{2 B_0 a_0 k}{T} \cdot \frac{\alpha \left[\lambda^2 + k^2 - \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right] - 2 \lambda \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2}{\left[\alpha^2 + \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right] \left\{ \left[\lambda^2 + k^2 - \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right]^2 + 4 \lambda^2 \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right\}}, \\ A_{\nu}^{(2)} &= \frac{2 B_0 a_0 k}{T} \cdot \frac{\frac{2\pi\nu}{T} \left[\lambda^2 + k^2 - \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right] + 2 \alpha \lambda \frac{2\pi\nu}{T}}{\left[\alpha^2 + \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right] \left\{ \left[\lambda^2 + k^2 - \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right]^2 + 4 \lambda^2 \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right\}}, \\ a_{\nu}^{(1)} &= \frac{2 k a_0}{T} \cdot \frac{k^2 + \lambda^2 - \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2}{\left[k^2 + \lambda^2 - \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2 \right]^2 + 4 \lambda^2 \left(\frac{2\pi\nu}{T} \right)^2}, \end{aligned}$$

$$a_v^{(2)} = \frac{4 k a_0}{T} \cdot \frac{\lambda \frac{2 \pi v}{T}}{\left[k^2 + \lambda^2 - \left(\frac{2 \pi v}{T} \right)^2 \right]^2 + 4 \lambda^2 \left(\frac{2 \pi v}{T} \right)^2}.$$

Führt man diese Werte in (11 d) ein, so erhält man:

$$B(t) = \frac{B_0}{\alpha T} + \frac{2 B_0}{T} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos \left(\frac{2 \pi v}{T} t - \arctan \frac{2 \pi v}{T \alpha} \right)}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{2 \pi v}{T} \right)^2}}. \quad (24)$$

Gl. (24) ist aber gerade die Fouriersche Entwicklung der Funktion $B_0 \cdot e^{-\alpha t}$ im Intervall von Null bis T für genügend große Werte von T .

Zum Schluß soll noch der Spezialfall $\Phi(t) \equiv \varphi(t)$ behandelt werden. Da $\varphi(t)$ unter der Wirkung des Einheitsstoßes zustande kommt, so müßte man für $B(t)$ in diesem Fall den Einheitsstoß selbst erhalten.

Aus (7) folgt zunächst: $B(t) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{-i \infty}^{+i \infty} e^{p t} \cdot dp$. Da dieses Integral nicht kon-

vergiert, integrieren wir nach t , gehen also von der Beschleunigung zur Geschwindigkeit $V(t)$ über. Man erhält nach Ausführen der Integration unter dem Integral-

zeichen: $V(t) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{-i \infty}^{+i \infty} \frac{e^{p t}}{p} dp + \text{const.}$ Dieses Integral bedeutet aber einen

Heavisideschen Einheitssprung⁴ an der Stelle $t = 0$, woraus man erkennt, daß Gl. (7) auch in diesem Fall zu einem richtigen Ergebnis führt.

(Eingegangen am 7. Oktober 1947.)

Die Torsion der Kreiswelle mit rechteckiger Längsnut.

Von H. Parkus, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Torsion der Kreiswelle mit rechteckiger Längsnut wird mit Hilfe der konformen Abbildung behandelt. Die größte Spannung, die bei ganz scharfen Ecken unendlich wird, nimmt mit zunehmendem Ausrundungsradius rasch ab, bleibt aber stets größer als das Doppelte der Spannung einer ungekerbten Welle.

Summary. The torsional problem for a circular shaft with a rectangular keyway is treated by means of conformal representation. The maximal stress which is infinite for sharp corners of the keyway decreases rapidly with increasing radius of rounding but remains always more than twice the stress in a shaft without a keyway.

Résumé. Le problème de la torsion d'un arbre circulaire avec une rainure de clavette rectangulaire est traité par la méthode de représentation conforme. Le fatigue maximal, qui est infini pour des angles aigus de la rainure de clavette, diminue rapidement avec l'arrondissement s'accroissant, mais persiste toujours plus grand que le double du fatigue d'un arbre sans rainure de clavette.

Einleitung.

Die Kenntnis der Spannungsverteilung in einer tordierten Kreiswelle mit rechteckiger Längsnut ist insbesondere im Maschinenbau von großer praktischer Wichtig-

⁴ Wagner: l. c. S. 28.

keit. Es liegt deshalb schon eine Reihe von Versuchen vor, die aber in ihren Ergebnissen beträchtlich voneinander abweichen.

Die vorliegende Arbeit führt das Problem mit Hilfe der St. Venantschen Torsionsfunktion auf die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurück und löst diese mittels konformer Abbildung. Hierbei wird der geschlossene Kreisquerschnitt durch einen unendlichen Bereich ersetzt, dessen Berandung in der Umgebung der Nut den vorgegebenen Kreisrand hinreichend genau annähert. Aus dem St. Venantschen Prinzip kann geschlossen werden, daß die berechnete Spannungsverteilung in der Nut mit der wirklichen Verteilung praktisch übereinstimmt. Es ergibt sich, daß die Größtspannung, die bei ganz scharfer Ecke unendlich wird, schon bei kleinen Abrundungsradien rasch abnimmt, praktisch aber das Doppelte der Spannung in einer ungekerbten Welle nicht unterschreitet.

Die Abbildungsfunktion.

Wir bilden das Äußere des Halbstreifens $x = \pm a/2, y \leq 0$ der $t = x + i y$ -Ebene so auf die obere Hälfte der $\zeta = \xi + i \eta$ -Ebene ab, daß die beiden auf der x -Achse gelegenen Punkte $t = \pm a/2$ des Streifens in die beiden Punkte $\zeta = \pm 1$ sowie der im Unendlichen gelegene Eckpunkt in den unendlich fernen Punkt der ζ -Ebene übergehen. Die Schwarz-Christoffelsche Formel liefert dann als Abbildungsfunktion;

$$t = C_1 \int_0^\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta + C_2.$$

Mit $C_2 = 0$ führen wir auch die Nullpunkte der beiden Ebenen ineinander über. Nach Erledigung der Integration bestimmt sich die zweite Konstante zu $C_1 = -2a i/\pi$ und man erhält:

$$t = \frac{a}{\pi} \left[i \ln (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - i \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (1)$$

Abb. 1 zeigt die t -Ebene mit den Kurven $\eta = 0, 0.1$ und 0.2 sowie $\xi = 1.6$ und 2 . Man sieht, daß die Kurven $\xi = \text{konst.}$ in der Umgebung der Nut sich der (strichliert eingezeichneten) Kreisberandung genügend genau anpassen, während die Kurven $\eta = \text{konst.}$ den Umriß der Nut selbst darstellen. $\eta = 0$ entspricht einer scharfen, $\eta > 0$ einer ausgerundeten Ecke.

Es soll deshalb das Torsionsproblem für den durch $\eta = \text{konst.} = \lambda$ und $\xi = \text{konst.} = c$ gegebenen unendlichen Bereich gelöst werden, wobei dann der numerischen Rechnung entsprechend ausgewählte Werte von λ und c zugrunde zu legen sind.

Das Torsionsproblem.

Wir ziehen zur Lösung der vorliegenden Aufgabe die St. Venantsche Torsionsfunktion¹ heran. Bezeichnen u, v, w die Verschiebungskomponenten in Richtung der drei Achsen x, y, z ($z = \text{Stabachse}$) und ϑ den Verdrehwinkel pro Längeneinheit, so gilt:

$$u = -\vartheta y z, \quad v = \vartheta x z, \quad w = \vartheta \varphi(x, y). \quad (2)$$

¹ J. W. Geckeler: Elastostatik. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 144. Berlin. 1928.

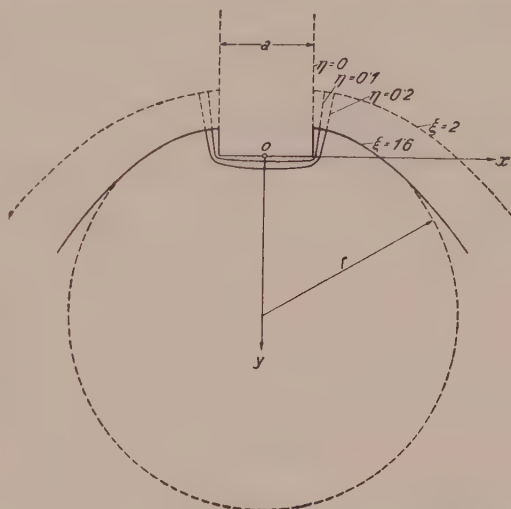


Abb. 1.

Die Torsionsfunktion φ hat hierbei der Potentialgleichung

$$\Delta\varphi = 0 \quad (3)$$

zu genügen.

Gehen wir nun durch die konforme Abbildung (1) zum krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem $\xi = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$ in der t -Ebene über, so gilt für die Verschiebungen U und V in ξ - bzw. η -Richtung, wenn noch

$$\frac{dt}{d\zeta} = p + iq, \quad h^2 = p^2 + q^2 \quad (4)$$

gesetzt wird:²

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{h} \left(u \frac{\partial x}{\partial \xi} + v \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{h} (p u + q v), \\ V &= \frac{1}{h} \left(u \frac{\partial x}{\partial \eta} + v \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{h} (p v - q u). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Mit den Gl. (2) ist dann:

$$U = \frac{\partial z}{h} (q x - p y), \quad V = \frac{\partial z}{h} (p x + q y). \quad (6)$$

Für die Schubverzerrung gilt weiter:²

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{z\xi} &= \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \xi} + h \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U}{h} \right) = \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \gamma_{z\eta} &= \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \eta} + h \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{h} \right) = \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Gl. (2) und (6) in (7) eingesetzt, entsteht:

$$\gamma_{z\xi} = \frac{\partial}{h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + q x - p y \right), \quad \gamma_{z\eta} = \frac{\partial}{h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + p x + q y \right). \quad (8)$$

Das Hookesche Gesetz bleibt unverändert:

$$\tau_{z\xi} = G \gamma_{z\xi}, \quad \tau_{z\eta} = G \gamma_{z\eta}. \quad (9)$$

Die Gl. (8) lassen sich noch etwas vereinfachen, wenn durch

$$\psi = \varphi - x y \quad (10)$$

die Funktion ψ eingeführt wird, welche wegen $\Delta(x y) = 0$ gleichfalls eine Potentialfunktion ist:

$$\Delta\psi = 0. \quad (11)$$

Es ist dann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + p y + q x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - q y + p x,$$

so daß die Gl. (8) schließlich lauten:

$$\gamma_{z\xi} = \frac{\partial}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 2 q x \right), \quad \gamma_{z\eta} = \frac{\partial}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 2 p x \right). \quad (12)$$

Wir haben die folgenden Randbedingungen zu erfüllen: Längs eines Randes $\xi = \text{konst.}$: $\tau_{z\xi} = 0$, also

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -2 q x, \quad (13)$$

längs eines Randes $\eta = \text{konst.}$: $\tau_{z\eta} = 0$, also

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -2 p x. \quad (14)$$

Mit den Gl. (11), (13) und (14) ist somit das Torsionsproblem auf die Lösung der

² H. Neuber: Kerbspannungslehre, S. 23. Berlin. 1937.

zweiten Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie für den in Abb. 2 dargestellten Halbstreifen zurückgeführt.

Wir zerlegen Gl. (1) noch in Real- und Imaginärteil und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{\pi} \left(-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\kappa} + \xi \nu + \eta \kappa + \frac{\pi}{2} \right), \\ y &= \frac{a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln [(\xi + \kappa)^2 + (\eta + \nu)^2] - \xi \kappa + \eta \nu \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2} + \xi^2 - \eta^2 - 1 \right)}, \\ \nu &= + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2} - \xi^2 + \eta^2 + 1 \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Es ist

$$\kappa \nu = \xi \eta. \quad (17)$$

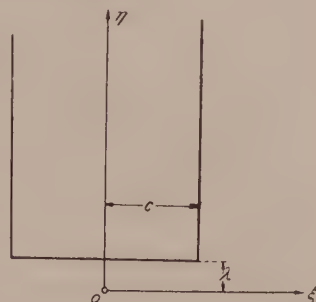


Abb. 2.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten dann:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = p = 2 \frac{a}{\pi} \nu, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta} = q = -2 \frac{a}{\pi} \kappa. \quad (18)$$

Die Lösung des Randwertproblems.

Die Ränder des Bereiches sind $\xi = \pm c$, $\eta = \lambda$ und $\eta = \infty$. Wir setzen die Lösung ψ additiv aus den folgenden drei Potentialfunktionen zusammen:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \sum_n \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n \xi [A_n \mathfrak{C} \mathfrak{v} \{ \alpha_n (\eta - \lambda) + B_n \mathfrak{S} \sin \alpha_n (\eta - \lambda)], \\ \psi_2 &= \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{C(\alpha)}{\alpha} \mathfrak{S} \sin \alpha \xi \cos \alpha (\eta - \lambda) d\alpha, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{2c} \quad (n = 1, 3, 5 \dots), \\ \psi_3 &= \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 D \xi \eta, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Es wird sich zeigen, daß mit diesem Ansatz allen Randbedingungen entsprochen werden kann.

Wir betrachten zuerst den Rand $\eta = \lambda$. Längs dieses Randes ist

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \sum_n B_n \sin \alpha_n \xi, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial \eta} = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 D \xi.$$

Aus den Randbedingungen (14) folgen damit die B_n als Fourier-Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} B_n &= B_n' + B_n'', \quad \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 B_n' = \frac{2}{c} \int_0^c (-2 p x) \sin \alpha_n \xi d\xi, \\ B_n'' &= \frac{2}{c} \int_0^c (-D \xi) \sin \alpha_n \xi d\xi = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8c}{(n\pi)^2} D. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nun behandeln wir den Rand $\xi = \pm c$. Der Ansatz (19) genügt bereits den Symmetriebedingungen des Problems: $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$ = gerade Funktion von ξ . Wir brauchen daher nur den Rand $\xi = +c$ zu betrachten. Dort ist

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty C(\alpha) \mathfrak{C} \mathfrak{v} \{ \alpha c \cos \alpha (\eta - \lambda) d\alpha, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 D \eta.$$

Wir haben also gemäß der Randbedingung (13) die Funktion $-2qx - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D\eta$ durch ein Fourier-Integral darzustellen. Dazu ist hier hinreichend, daß das Integral

$$\int_0^\infty \left| -2qx - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D\eta \right| d\eta \quad (21)$$

existiert (alle weiteren Bedingungen sind erfüllt).

Mit den Gl. (15) und (18) ist für $\xi = c$:

$$-2qx - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D\eta = 4 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \left[\kappa \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\kappa} \right) + \left(\kappa^2 + c^2 - \frac{D}{4} \right) \eta \right]. \quad (22)$$

κ steigt gemäß Gl. (16) monoton vom Wert $\kappa = +\sqrt{c^2 - 1}$ in $\eta = 0$ bis zu $\kappa = c$ in $\eta = \infty$. Die Funktion (22) ist somit im Endlichen regulär und die Konvergenz des Integrals (21) ist dann sichergestellt, wenn es gelingt, die Konstante D so zu bestimmen, daß der Integrand im Unendlichen von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.

Wir entwickeln (22) in der Umgebung des unendlich fernen Punktes $\eta = \infty$ in eine Laurentsche Reihe und erhalten:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= c^2 - \frac{c^2}{\eta^2} + \frac{c^2(c^2 + 1)}{\eta^4} - \dots, & \kappa &= c - \frac{c}{2\eta^2} + \frac{(4c^2 + 3)c}{8\eta^4} - \dots, \\ \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\kappa} &= \frac{\pi}{2} - \frac{c}{\eta} + \frac{(2c^2 + 3)c}{6\eta^3} + \dots \end{aligned}$$

und daraus

$$-2qx - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D\eta = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \left[(8c^2 - D)\eta + \frac{8c^4}{3\eta^3} + \dots \right]. \quad (23)$$

Somit wird

$$D = 8c^2. \quad (24)$$

Wir können nun die Fouriersche Integraldarstellung anschreiben:

$$-2qx - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{\lambda}^\infty \left[-2qx - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D\eta \right]_{\eta=\gamma} \cos \alpha (\eta - \lambda) \cos \alpha (\gamma - \lambda) d\gamma.$$

Aus der Bedingung (13) folgt dann mit den Gl. (22) und (24) für die Funktion $C(\alpha)$:

$$C(\alpha) \mathfrak{Cof} \alpha c = \frac{8}{\pi} \int_{\lambda}^\infty \left[\kappa \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\kappa} \right) - (c^2 - \kappa^2) \eta \right] \cos \alpha (\eta - \lambda) d\eta. \quad (25)$$

Als letztes ist noch der Rand $\eta = \infty$ zu erledigen. Wir betrachten zuerst einen beliebigen Rand $\eta = \eta_0 = \text{konst.}$ Längs eines solchen muß gemäß Gl. (14) die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned} \sum_n \sin \alpha_n \xi [A_n \mathfrak{Sin} \alpha_n (\eta_0 - \lambda) + B_n \mathfrak{Cof} \alpha_n (\eta_0 - \lambda)] &= \\ = \int_0^\infty C \mathfrak{Sin} \alpha \xi \sin \alpha (\eta_0 - \lambda) d\alpha - D\xi - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 2px. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Um dieser Bedingung für jedes ξ zu genügen, wäre die rechte Seite der Gleichung in eine Fouriersche Reihe nach $\sin \alpha_n \xi$ zu entwickeln. Seien $F_n(\eta_0)$ die Koeffizienten dieser Reihe. Dann haben wir:

$$A_n \mathfrak{Sin} \alpha_n (\eta_0 - \lambda) + B_n \mathfrak{Cof} \alpha_n (\eta_0 - \lambda) = F_n(\eta_0).$$

Wir lassen nun η_0 über alle Grenzen wachsen. Dann wird:

$$A_n + B_n = \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \frac{2 F_n(\eta_0)}{e^{\alpha_n \eta_0}}. \quad (27)$$

Die ersten beiden Glieder der rechten Seite von Gl. (26) bleiben mit wachsendem η_0 endlich. Für das dritte Glied gilt den Gl. (15) und (16) zufolge:

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} 2 p x = 8 \xi \eta_0^2 \Big|_{\eta_0 = \infty}.$$

Daher gehen auch die Koeffizienten $F_n(\eta_0)$ mit η_0 höchstens wie η_0^2 gegen Unendlich. Somit verschwindet die rechte Seite von Gl. (27) und wir erhalten für die Koeffizienten A_n :

$$A_n = -B_n. \quad (28)$$

Der Spannungsverlauf an der Nut.

An diesem Rand ist $\eta = \lambda$ und die Schubspannung wird gemäß den Gl. (9) und (12):

$$\tau = \tau_{z\xi} = \frac{G \vartheta}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 2 q x \right). \quad (29)$$

Hierbei ist nach Gl. (19):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sum_n A_n \cos \alpha_n \xi, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty C \Im \alpha \xi d\alpha, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 D \lambda. \quad (30)$$

Die Koeffizienten A_n sind aus den Gl. (28) und (20), der Koeffizient D aus Gl. (24) zu berechnen. Für $\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi}$ erhalten wir mit Gl. (25):

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty d\alpha \left[\lambda \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\eta}{\alpha} \right) - (c^2 - \alpha^2) \eta \right]_{\xi=c} \frac{\Im \alpha \xi}{\Im \alpha c} \cos \alpha (\eta - \lambda) d\eta. \quad (31)$$

In Gl. (31) ist die Vertauschung der Integrationsreihenfolge erlaubt, solange $\xi < c$.³ Es soll daher zuerst nach α integriert werden. Wir haben dann das folgende Integral zu berechnen:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{\Im \alpha \xi}{\Im \alpha c} \cos \alpha (\eta - \lambda) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Im \alpha \xi}{\Im \alpha c} \cos \alpha (\eta - \lambda) d\alpha + \\ &+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Im \alpha \xi}{\Im \alpha c} \sin \alpha (\eta - \lambda) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Im \alpha \xi}{\Im \alpha c} e^{i\alpha(\eta-\lambda)} d\alpha. \end{aligned}$$

Die Auswertung ist mittels Residuenkalkül möglich. Wird α als komplexe Zahl aufgefaßt, so hat der Integrand längs der imaginären Achse eine unendliche Anzahl von Polen. Wir formen durch die Transformation

$$e^{\alpha c} = t = x + i y$$

um. Es ist dann:

$$2 c J = \int_0^\infty \frac{1+t^2 \frac{\xi}{c}}{1+t^2} t^{-\frac{\xi}{c} + \frac{i}{c}(\eta-\lambda)} dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} t^{-\frac{\xi}{c} + \frac{i}{c}(\eta-\lambda)} dt + \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} t^{\frac{\xi}{c} + \frac{i}{c}(\eta-\lambda)} dt.$$

Die beiden Integranden besitzen in $t = 0$ einen Verzweigungspunkt. Wir integrieren

³ G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, S. 399. Berlin. 1937.

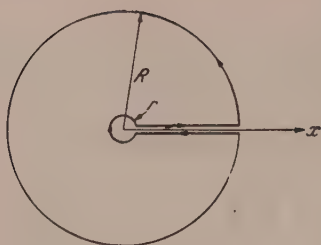


Abb. 3.

daher über die in Abb. 3 angegebene Berandung, bestehend aus den beiden Kreisen mit den Radien R und r und aus der doppelt durchlaufenen positiven x -Achse. In dem so begrenzten Bereich sind die Integranden eindeutig und analytisch mit Ausnahme der beiden Pole $t = \pm i$.

Beim Grenzübergang zu $r \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ verschwinden die betreffenden Anteile. Es bleiben die Integrale längs $t \neq x e^{i\varphi}$ mit $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$. Also für das erste Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} x^{-\frac{\xi}{c} + \frac{i}{c}(\eta-\lambda)} dx \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{c}(\eta-\lambda) - i\frac{2\pi}{c}\xi} \right) = 2\pi i \sum \text{Res} =$$

$$= \pi e^{-\frac{\pi}{2c}(\eta-\lambda) - i\frac{\pi}{2c}\xi} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{c}(\eta-\lambda) - i\frac{\pi}{c}\xi} \right)$$

und für das zweite Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} x^{\frac{\xi}{c} + \frac{i}{c}(\eta-\lambda)} dx \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{c}(\eta-\lambda) + i\frac{2\pi}{c}\xi} \right) = 2\pi i \sum \text{Res} =$$

$$= \pi e^{-\frac{\pi}{2c}(\eta-\lambda) + i\frac{\pi}{2c}\xi} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{c}(\eta-\lambda) + i\frac{\pi}{c}\xi} \right).$$

Zusammen ergibt sich schließlich:

$$J = \frac{\pi}{c} \cos \frac{\pi \xi}{2c} \frac{\Im \left[\frac{\pi}{2c}(\eta-\lambda) \right]}{\cos \frac{\pi \xi}{c} + \Im \left[\frac{\pi}{c}(\eta-\lambda) \right]}, \quad \xi < c.$$

Damit wird Gl. (31):

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \frac{8}{c} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \cos \frac{\pi \xi}{2c} \int_{\lambda}^{\infty} \left[\kappa \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\eta}{\kappa} \right) - (c^2 - \kappa^2) \eta \right]_{\xi=c} \frac{\Im \left[\frac{\pi}{2c}(\eta-\lambda) \right]}{\cos \frac{\pi \xi}{c} + \Im \left[\frac{\pi}{c}(\eta-\lambda) \right]} d\eta. \quad (32)$$

Der Spannungsverlauf und die Spannungsspitze in der Nut werden im wesentlichen vom Ausrundungsradius der Hohlkehle bestimmt. Wir wollen hier unter „Ausrundungsradius“ den kleinsten Krümmungsradius der Kurve $\eta = \lambda$ verstehen. Dieser Radius ist noch zu berechnen.

Die Krümmung längs einer Koordinatenlinie $\eta = \text{konst.}$ ist gegeben durch:⁴

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

Mit h nach den Gl. (4), (16) und (18) ergibt sich längs $\eta = \lambda$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\pi}{2a} \frac{\lambda (\xi^2 + \lambda^2 + 1)}{[(\xi^2 + \lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2]^{3/4}}. \quad (33)$$

Aus der Bedingung $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varrho} \right) = 0$ erhält man

$$\xi^2 + \lambda^2 = \frac{1}{3} (-2 + \sqrt{25 + 24\lambda^2}) \quad (34)$$

⁴ L. Föppl u. H. Neuber: Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik, S. 91. München und Berlin, 1935.

als Bestimmungsgleichung für die Stelle der maximalen Krümmung. Trägt man die Beziehung (34) in Gl. (33) ein, so ergibt sich für den kleinsten Krümmungsradius:

$$\varrho_{\min} = \frac{20\sqrt[4]{10}}{3\sqrt[3]{3}} \frac{a}{\pi} \frac{[5 + 6\lambda^2 - \sqrt{25 + 24\lambda^2}]^{5/4}}{\lambda(1 + \sqrt{25 + 24\lambda^2})}. \quad (35)$$

Numerische Auswertung.

Von der Konstanten c hängt das Verhältnis Nutbreite zu Nuttiefe ab. Wir wählen $c = 1.6$. Dies entspricht mittleren Verhältnissen, wie sie in der Praxis vorkommen. Weiters setzen wir der Reihe nach $\lambda = 0, 0.1$ und 0.2 . Dies entspricht den drei in Abb. 1 eingezeichneten Nutformen, vgl. Tab. 1. In dieser Tabelle sind auch die zugehörigen Ausrundungsradien gemäß Gl. (35) eingetragen, und zwar in Vielfachen der Nutbreite $b = 2x$ ($\xi = c, \eta = \lambda$). $\lambda = 0$ entspricht der scharfen Ecke.

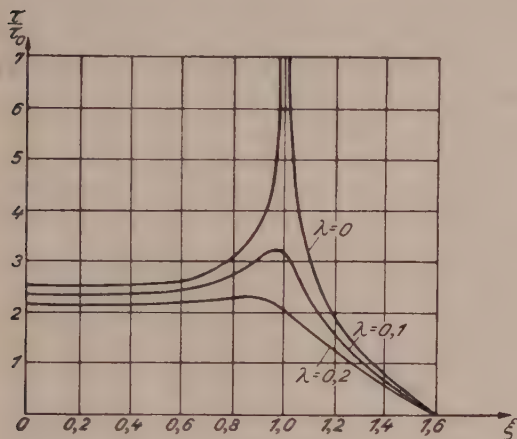


Abb. 4.

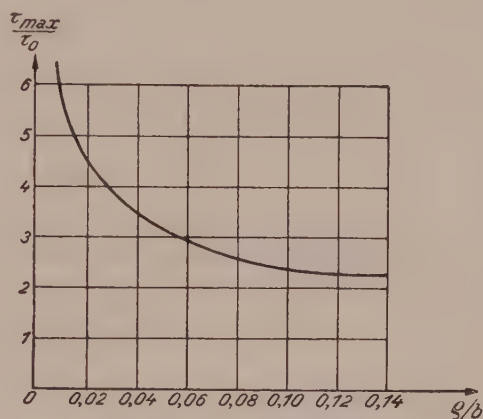


Abb. 5.

Tab. 1.

ξ	0	0.5	1	1.6	
$\lambda = 0.1$	$\frac{x}{y}$	0	0.964	1.613	1.818
		0.200	0.174	0.088	— 0.939
$\lambda = 0.2$	$\frac{x}{y}$	0	0.979	1.687	2.072
		0.403	0.350	0.123	— 0.900
					$\frac{a}{\pi} \frac{\varrho_{\min}}{b} = \frac{0.1783}{3.636} = 0.049$
					$\frac{a}{\pi} \frac{\varrho_{\min}}{b} = \frac{0.5023}{4.144} = 0.121$

Bei der Berechnung der Koeffizienten B_n gemäß den Gl. (20) ist zu beachten, daß die Funktion $-2px$ für $\lambda = 0$ in $\xi = 1$ eine Ecke aufweist. Die Fouriersche Entwicklung konvergiert daher dort sehr schlecht. Um sie zu verbessern, könnte man z. B. die Potentialfunktion

$$\psi_4 = -a [\xi y + x(\eta - \lambda)]$$

überlagern, deren Ableitung nach η in $\xi = 1$ die gleiche Ecke mit entgegengesetztem Vorzeichen aufweist. Da der Rand $\lambda = 0$ aber nur theoretisches Interesse besitzt (unendlich große Spannung in den Ecken), genügt die erreichte Genauigkeit. Für $\lambda > 0$ verläuft die Funktion $-2px$ glatt.

Die Ermittlung der Koeffizienten B_n nach Gl. (20) und die Auswertung des Integrals (32) geschah numerisch. In Abb. 4 ist der Verlauf der Schubspannungen

über der abgewickelten Nutberandung dargestellt. Hierbei bezeichnet τ_0 die Schubspannung am Umfang einer ungeschwächten Welle vom Radius r , die um den gleichen Winkel verdreht wird:

$$\tau_0 = G \vartheta r. \quad (36)$$

τ ist die Spannung in der Nut gemäß Gl. (29). Den Kurven Abb. 4 wurde ein Wellenradius $r = 2b$ zugrunde gelegt, entsprechend den üblichen Abmessungen ausgeführter Wellen.

Aus der Abbildung ist zu entnehmen, daß die Spannungsspitze in der Hohlkehle, die bei scharfer Ecke unendlich groß wird, schon bei geringer Ausrundung rasch abnimmt und bei einem Ausrundungsradius von 12% der Nutbreite praktisch verschwunden ist. Die Schubspannung verläuft dann längs der ganzen Nutbreite fast konstant; sie beträgt aber immer noch rund das Doppelte der Spannung am Kreisumfang.

In Abb. 5 ist die Spannungserhöhung in der Hohlkehle in Abhängigkeit vom Verhältnis Ausrundungsradius zu Nutbreite aufgetragen. Vergleich mit den Ergebnissen von Messungen verschiedener Autoren^{5, 6} zeigt eine beträchtliche Streuung in den Messungsergebnissen, welche zum Teil über, zum Teil unter den Werten der vorliegenden, für die gewählte Berandung strengen Lösung liegen.

(Eingegangen am 17. Februar 1948.)

Grundsätzliches zum Verhalten der Supraleiter im Magnetfeld.

Von K. M. Koch, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß der Zustand der Supraleitfähigkeit als ein Spezialfall der „geordneten Zustände“ im Sinne der Theorie von Bragg und Williams aufgefaßt werden kann. Die Wirkung eines Magnetfeldes auf den Supraleiter läßt sich als Beeinflussung der Ordnungsenergie V_0 darstellen, daraus ergibt sich die Verschiebung des Sprungpunkts ebenso wie der thermische Effekt bei der Zerstörung der Supraleitung durch ein Magnetfeld $H > H_{\text{krit}}$. Der klassisch nicht deutbare Meißner-Ochsenfeld-Effekt (Abschirmeffekt bei Abkühlung im konstanten Magnetfeld) erscheint nach dieser Auffassung als Folge der Tendenz nach dem maximalen Ordnungsgrad (Minimum der potentiellen Energie).

Summary. It is shown, that the state of supraconductivity can be understood as a special case of an "ordered state" in the sense of the theory of Bragg and Williams. The action of a magnetic field on the supraconductor may be represented as an influence on the ordering energy V_0 . This leads to an understanding of the dislocation of the transition point and of the thermal effect which accompanies the destruction of supraconductivity through a magnetic field $H > H_{\text{crit}}$. According to this concept the Meißner-Ochsenfeld effect (creation of a screening-current by cooling-down in a constant magnetic field) appears to be a consequence of the tendency towards the maximum degree of order (minimum of potential energy).

Résumé. On a montré que l'état de supra-conductibilité peut-être considéré comme un cas particulier des «états ordonnés», au sens de la théorie de Bragg et Williams. L'effet d'un champ magnétique sur le supra-conducteur représente alors l'influence d'une énergie ordonnante V_0 . Cela explique aussi le déplacement du point de transition, ainsi que l'effet thermique lié à la destruction de la supra-conductibilité par un champ magnétique $H > H_{\text{crit}}$. L'effet Meißner (création d'un courant protecteur lors du refroidissement dans un champ magnétique constant) apparait, dans cette conception, comme une conséquence de la tendance vers l'ordre maximum (minimum de l'énergie potentielle).

⁵ A. A. Griffith u. G. I. Taylor: On the use of soapfilms in solving torsion problems. Engineering 104, 652, 699 (1917).

⁶ H. Quest: Eine experimentelle Lösung des Torsionsproblems. Ingenieur-Arch. 4, 510 (1933).

I.

In einer vorhergehenden Arbeit¹ war gezeigt worden, daß das Verhältnis von Normal- zur Supraleitung in Analogie zum Verhältnis Para-Ferromagnetismus verstanden werden kann, wenn man über die Natur des Leitungsmechanismus gewisse, von den Vorstellungen der Elektronengastheorie etwas abweichende Annahmen macht. Es handelt sich dabei vor allem um die Annahme, daß die Wirkung des elektrischen Feldes im Leiter nicht in der Beschleunigung „freier“ Leitungselektronen bestehe, sondern in der Ausrichtung von gegebenen „Elementarströmen“, die ebenso zu behandeln ist wie die Ausrichtung der magnetischen Dipole im Paramagnetikum. Diese „Elementarströme“ könnten beispielsweise in spontanen Elektronenübergängen zwischen verschiedenen Bindungszuständen bestehen, wie man sie in der Theorie der Photohalbleiter und der Kristallphosphore anzunehmen gewohnt ist. Der Übergang zur Supraleitung wäre dann ebenso wie der vom Para- zum Ferromagnetismus durch die formale Einführung eines „inneren“ Feldes zu bewerkstelligen, mit anderen Worten: durch die Annahme, daß unterhalb des Sprungpunktes eine spontane Ausrichtung der Elementarströme erfolgt. Für diese Annahme spricht vor allem das thermodynamische Verhalten der Supraleiter, d. h. die Tatsache, daß die Energie der Dauerströme reversibel in Gitterenergie umgewandelt werden kann.

Die vorliegende Arbeit stellt sich nun, ohne auf die vielen offenen Fragen der vorhergehenden Veröffentlichung einzugehen, eine ziemlich bescheidene und begrenzte Aufgabe. Auf Grund der Annahme, daß der Zustand der Supraleiter in Analogie zu den Überstrukturen von Bragg und Williams primär durch eine Ordnungsenergie bestimmt ist, soll das Verhalten der Supraleiter im Magnetfeld durch die Zusatzannahme erklärt werden, daß die Wirkung des Feldes formal als eine Beeinflussung dieser Ordnungsenergie beschrieben werden kann. Welche allgemeine Tragweite diesem Gedanken zukommt, soll am Schlusse dieser Arbeit in Kürze ausgeführt werden.

1. Es ist nicht ganz überflüssig, der folgenden Untersuchung eine kurze Darlegung der Grundbegriffe der Theorie der Überstrukturen nach Bragg und Williams² vorzuschicken. Nach dieser Theorie ist der Zustand einer Überstruktur durch die Angabe eines „Ordnungsgrades“ S gekennzeichnet, der annähernd³ der Wahrscheinlichkeit entspricht, einen Gitterpunkt durch ein „richtiges“ Atom besetzt zu finden. S ist 1 für volle Ordnung, wenn also jeder Gitterpunkt mit dem entsprechenden Atom besetzt ist, und Null für volle Unordnung. In diesem Fall besteht gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Gitterplatz falsch oder richtig besetzt ist. Wenn alle Gitterplätze falsch besetzt wären, so wäre dies ja sozusagen das Spiegelbild der Ordnung. Das Gleichgewicht der Verteilung zwischen richtig und falsch besetzten Plätzen wird bei $0 < S < 1$ durch die Annahme geregelt, daß 1. der Übergang eines Atoms von einem richtigen zu einem falschen Gitterplatz die Arbeit V erfordert, die ihrerseits dem Ordnungsgrad S proportional ist, also

$$V = V_0 \cdot S \quad (1)$$

(V nimmt demnach bei abnehmendem Ordnungsgrad von V_0 bis Null ab); und daß 2. die Wahrscheinlichkeit der Übergänge von richtigen zu falschen Gitterplätzen gleich der Wahrscheinlichkeit der umgekehrten Übergänge mal $e^{-V/kT}$ ist. Daraus erhält man durch einfache Rechnung S als Funktion von V_0 und T , die mit wachsen-

¹ K. M. Koch: Österr. Ingenieur-Arch. Bd. II, 363, 1948.

² W. L. Bragg u. E. J. Williams: Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 145, 699 (1934).

³ Die Wahrscheinlichkeit p , daß ein Gitterplatz richtig besetzt ist, wird 1 für volle Ordnung und r (das ist das Verhältnis der richtigen Atome zur Gesamtzahl) bei voller Unordnung. $S = (p - r)/(1 - r)$ wird demnach 1 für $p = 1$ und 0 für $p = r$.

dem V_0 zu-, mit wachsender Temperatur abnimmt. Besteht die Überstruktur aus gleich viel Atomen beider Gattungen (z. B. Cu, Zn), dann erhält man für $S = f(V_0, T)$ den Ausdruck

$$S = \tanh V_0 S / 4 k T. \quad (2)$$

Indem man $V_0 S / 4 k T = x$ setzt und S einmal als $S = \tanh x$, ein zweites Mal als $S = 4 k T / V_0 \cdot x$ graphisch darstellt, kann S als Funktion von T punktweise ermittelt werden. (Das Verfahren entspricht völlig dem bei der Weißschen Theorie des Ferromagnetismus angewendeten.) Auf Grund der graphischen Darstellung (Abb. 1) erhält man auch die Umwandlungstemperatur T_u als jene Temperatur, oberhalb welcher keine Ordnung mehr möglich ist, indem man $4 k T / V_0$ der Steigung der Nullpunktstangente von $\tanh x$, also 1 gleichsetzt. Man erhält

$$T_u = V_0 / 4 k. \quad (3)$$

Nach Bragg und Williams überlagert sich der Wärmemenge $dQ = c_p \cdot dT$, die zur Erwärmung von T auf $T + dT$ erforderlich ist, noch ein Energiebetrag, der gleich

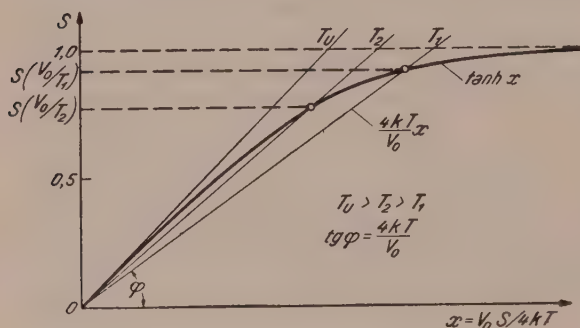


Abb. 1. Graphische Bestimmung des Ordnungsgrades $S = \tanh x$, $x = V_0 \cdot S / 4 k T$.

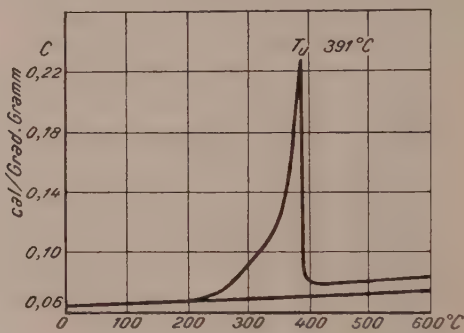


Abb. 2. Spezifische Wärme von AuCu_3 beim Übergang: geordnet—ungeordnet (nach F. W. Jones und C. Sykes).

der pro Atom zu leistenden Unordnungsarbeit V mal der Zahl der in diesem Temperaturintervall aus richtigen in falsche Gitterlagen übergehenden Atome ist, die ihrerseits proportional dS ist. Aus diesen Vorstellungen läßt sich der Verlauf der spezifischen Wärme in der Umgebung des Umwandlungspunktes dem qualitativen Verlauf nach (Abb. 2) gut verstehen. Aber auch die Größenordnung des Sprunges der spezifischen Wärme beim Übergang zur vollen Unordnung ergibt sich recht befriedigend aus der Theorie.

2. Es wird heute allgemein angenommen, daß der Supraleitzustand in irgendeinem erweiterten Sinne des Begriffs ein Ordnungszustand ist. Besonders klar sind derartige Gedanken von J. Frenkel⁴ entwickelt worden, wenn auch bei Frenkel ein ausdrücklicher Hinweis auf die Überstrukturen als Spezialfall der Ordnungszustände noch fehlt.

Die Auffassung des Supraleitzustandes als Ordnungszustand wird ganz wesentlich durch den Verlauf der spezifischen Wärme (Abb. 3) unterstützt. Man wird annehmen dürfen, daß der Anstieg von c_s bei Annäherung an den Umwandlungspunkt (Sprungpunkt) im Sinne der Braggschen Theorie durch die Überlagerung einer auf ein größeres Temperaturintervall verteilten Umwandlungswärme bedingt ist. Beim Supraleiter sind wir in der Lage, durch Anlegen eines genügend starken Magnetfeldes auch bei Temperaturen weit unterhalb des Sprungpunktes den Normalleitzustand wieder

⁴ J. Frenkel: *Physic. Rev.* **43**, 907 (1933).

herzustellen. Die in diesem Fall gemessenen spezifischen Wärmen liegen ganz eindeutig auf der Verlängerung der oberhalb T_u ermittelten Kurve. Das Integral

$$Q = \int_0^{T_u} (c_s - c_n) dT \quad (H = 0) \quad (4)$$

kann dann mit einiger Annäherung als der Wert der gesamten Umwandlungswärme angesehen werden. Es ist allerdings anzunehmen, daß die „wahre“ spezifische Wärme im supraleitenden Zustand nicht ganz mit c_n identisch ist, die Differenz ist aber sicher nicht sehr beträchtlich.

Durch die Einwirkung eines Magnetfeldes wird der Sprungpunkt der Supraleiter gegen tiefere Temperaturen hin verschoben. Ältere Messungen, bei denen der Einfluß des Entmagnetisierungsfaktors nicht genügend beachtet wurde, erweckten den Eindruck, als ob in diesem Fall auch der Verlauf der spezifischen Wärme prinzipiell verändert würde. Aus neueren Messungen, die unter korrekteren Versuchsbedingungen durchgeführt wurden (Abb. 3), geht hervor, daß die Form des Übergangs im großen und ganzen unverändert bleibt und die ganze Kurve lediglich auf ein kleineres Temperaturintervall zusammengedrängt wird. Daraus könnte man versuchsweise den Schluß ziehen, daß das Magnetfeld den Mechanismus der Umwandlung nicht beeinflußt und daß seine Wirkung nur eine indirekte, auf dem Umweg über die Ordnungsenergie V_0 ist. Wir nehmen also an, daß V_0 in irgendeiner Weise vom Magnetfeld abhängig ist und daß man diese Abhängigkeit in erster Näherung durch ein dem Magnetfeld proportionales Zusatzglied ausdrücken kann, also

$$V_0(H) = V_0 + c \cdot H. \quad (5)$$

Vergleicht man diesen Ansatz mit dem Ausdruck (3), den die Braggsche Theorie für die Umwandlungstemperatur liefert, so sieht man, daß die Tatsachen nur durch ein negatives Zusatzglied beschrieben werden können. Man erhält so

$$T_u = (V_0 - c H) / 4 k. \quad (6)$$

Damit findet die Verschiebung des Sprungpunktes durch das Magnetfeld ihren Ausdruck. Löst man (6) nach H auf, so erhält man eine Gleichung, die die Abhängigkeit der „kritischen Feldstärke“ von der Temperatur beinhaltet.

$$H_k = (V_0/c) - (4 k/c) \cdot T. \quad (7)$$

Daß H_k nach (7) eine lineare Funktion von T ist, während die durch Messung ermittelten Schwellenwertskurven in vielen Fällen einen parabolischen Verlauf zeigen, darf bei der sehr rohen Näherung, die dem Ansatz (5) zugrunde liegt, nicht verwundern. Für die folgenden Überlegungen ist eine bessere Annäherung nicht erforderlich.

3. Der Ausdruck für den Ordnungsgrad S wird auch für den vorliegenden Spezialfall annähernd durch Gl. (2) gegeben sein. Es kommt ja letzten Endes nur darauf an, daß S eine monotone Funktion von V_0/T wird, die für $T \rightarrow 0$ gleich 1 wird und

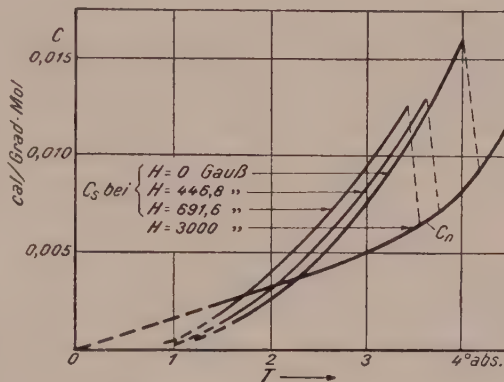


Abb. 3. Spezifische Wärme von Tantal beim Übergang: supra-—normaleitend (nach Keesom und Désirant).

im Nullpunkt eine Tangente mit positiver Steigung ($\operatorname{tg} \varphi < +\infty$) hat. Setzen wir (5) in (2) ein, so erhalten wir

$$S = \operatorname{tgh} (V_0 - c H) \cdot S/4 k T. \quad (8)$$

Nach dieser Gleichung müßte das Einschalten eines Magnetfeldes eine Verminderung des Ordnungsgrades bewirken. Da diese mit einem bestimmten Energieaufwand verknüpft ist, der sich nach der Theorie zu

$$dE = \operatorname{const.} \cdot V_0 \cdot S \cdot dS$$

berechnet, so müßte das Einschalten eines Magnetfeldes von einer Abkühlung des Versuchskörpers oder von der Aufnahme einer äquivalenten Wärmemenge begleitet sein. Tatsächlich zeigen die Versuchsergebnisse einen solchen Effekt erst dann, wenn man das Magnetfeld bis über den kritischen Wert steigert. Dann ist die aufgenommene bzw. bei der Wiederherstellung des Supraleitzustandes durch Abschalten des Magnetfeldes abgegebene Wärmemenge sogar fast quantitativ der im feldfreien Zustand gemäß Gl. (4) gemessenen Umwandlungswärme. Eine eingehendere Untersuchung, die auch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik berücksichtigt, liefert für Q den etwas modifizierten Ausdruck

$$Q(T) = T \int_0^T (c_s - c_n)/T \cdot dT,$$

Daß die Wärmeentwicklung nicht, wie es Gl. (8) erwarten ließe, schon beim ersten Einschalten eines unterkritischen Magnetfeldes, sondern erst dann einsetzt, wenn das Feld die vollständige Zerstörung des Ordnungszustandes auslöst, findet bei näherer Betrachtung eine überraschende Aufklärung. Bekanntlich erzeugt das Einschalten eines Feldes $H < H_k$ an der Oberfläche eines Supraleiters einen Dauerstrom, dessen Magnetfeld das äußere Feld im Inneren des Versuchskörpers vollkommen kompensiert (Abschirmstrom). Erst wenn das äußere Feld in das Innere des Versuchskörpers eindringt, was sich durch Sondenmessungen feststellen läßt, tritt der thermische Effekt auf. An günstigen Fällen (Kugeln oder Rotationsellipsoiden, die einen bestimmbaren Entmagnetisierungsfaktor haben) kann man quantitativ verfolgen, daß Eindringen des Feldes, Störung des Ordnungsgrades und Wärmeeffekt proportional laufen. Durch den Abschirmeffekt wird also die Gültigkeit der Gl. (8) für das Volumen des Supraleiters aufgehoben, nicht aber für die Oberflächenschicht, von der die Zerstörung des Supraleitzustandes ihren Ausgang nimmt. Darüber wird noch an anderer Stelle zu sprechen sein.

4. Es ist zweifellos eine bedeutende Stützung der hier versuchten Deutung der Wirkung eines Magnetfeldes auf einen Ordnungszustand, wenn sich zeigen läßt, daß diese Methode auch auf den Ferromagnetismus übertragen werden kann. Da die Wirkung des Magnetfeldes in diesem Fall offenbar in einer Erhöhung des Ordnungsgrades besteht, wird man sie wohl im Gegensatz zur Supraleitung durch ein positives Zusatzglied beschreiben müssen. Aus

$$S = \operatorname{tgh} \cdot (V_0 + c H) \cdot S/4 k T$$

müßte wegen

$$T_u = (V_0 + c H)/4 k$$

geschlossen werden, daß das Magnetfeld eine Verschiebung der Umwandlungstemperatur (Curie-Punkt) zu höheren Temperaturen bewirke. Leider liegen keine Messungen der spezifischen Wärme bei konstantem Magnetfeld vor, die eine Verschiebung der gesamten λ -Kurve nach oben in Analogie zu der bei Supraleitern beobachteten (Abb. 3) aufweisen würden. E. Ahrens,⁵ der die spezifische Wärme von Nickel nach einer inter-

⁵ E. Ahrens: Ann. Physik (V), **21**, 169 (1934).

essanten Methode gemessen hat, hat ebenfalls eine Beeinflussung des Curie-Punktes im angegebenen Sinn erwartet, nur war das von ihm angewendete Magnetfeld zu schwach, um einen Effekt zu geben. Dagegen verweist Borelius im Handbuch der Metallphysik, Bd. I/1, S. 286, 1935, auf Messungen der Sättigungsmagnetisierung in Nickel und Eisen in Abhängigkeit von der Temperatur, wobei das Magnetfeld als konstanter Parameter festgehalten wurde (Abb. 4). Die Kurven zeigen unverkennbar einen Verlauf, der für die angenommene Verschiebung des Curie-Punktes spricht und von Borelius auch in diesem Sinn gedeutet wurde. Die Abweichungen bei höheren Temperaturen sind wohl auf einen sekundären Mechanismus zurückzuführen.

Auf der anderen Seite beobachtet man bei einer Erhöhung der spontanen Magnetisierung (= Ordnungsgrad) durch ein hinreichend starkes Magnetfeld eine Temperaturerhöhung, also Wärmeabgabe, genau umgekehrt wie beim Supraleiter und in Übereinstimmung damit, daß hier das Magnetfeld eine Erhöhung des Ordnungsgrades bewirkt. Daß bei kleineren Feldstärken kein Wärmeeffekt auftritt, wird nach der allgemein anerkannten Auffassung durch die Annahme gedeutet, daß das Magnetfeld zuerst nur Drehungen des Magnetisierungsvektors und Wandverschiebungen ohne Änderungen der pauschalen Magnetisierung auslöst und erst nach deren Abschluß eine Erhöhung des Ordnungsgrades bewirkt.

Wir sehen somit, daß die eigenartige Gegensätzlichkeit von Supraleitung und Ferromagnetismus in ihrem Verhalten gegenüber dem Magnetfeld: dort Erniedrigung des Sprungpunktes, hier Erhöhung des Curie-Punktes sowie das umgekehrte Vorzeichen des magnetokalorischen Effektes, auf die Annahme zurückgeführt werden kann, daß das Magnetfeld in dem einen Fall eine Erniedrigung, im anderen eine Erhöhung des Ordnungsgrades, richtiger gesagt, der Ordnungsenergie V_0 bewirke.

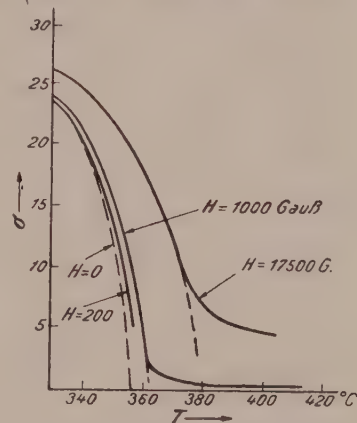


Abb. 4. Sättigungsmagnetisierung von Nickel bei verschiedenen Feldstärken in Abhängigkeit von der Temperatur (nach Handbuch der Metallphysik Bd. I/1, S. 286).

II.

1. Die Ausbildung eines Abschirmstromes an der Oberfläche eines Supraleiters beim Einschalten des Magnetfeldes nach erfolgter Herstellung des Supraleitzustandes ($T = \text{konst.}$) erweist sich bekanntlich als eine triviale Folge des Induktionsgesetzes und der unendlichen Leitfähigkeit. Wird das Feld dagegen schon oberhalb des Sprungpunktes eingeschaltet und dann erst ($H = \text{konst.}$) der Supraleitzustand durch Abkühlen hergestellt, so scheint es nach klassischen Gesetzen nicht erklärbar, wenn auch in diesem Fall der volle Abschirmeffekt zustande kommt. Lassen wir zunächst die Frage nach der Dynamik des Übergangs $N \rightarrow S$ im Magnetfeld bei Seite, so geben die Ausführungen des vorigen Abschnittes zumindest eine formale Möglichkeit, den von Meißner und Ochsenfeld entdeckten Abschirmeffekt bei konstantem Magnetfeld (in der Literatur allgemein als Meißner-Ochsenfeld-Effekt bezeichnet), auf ein allgemeineres Prinzip zurückzuführen. Dieses allgemeine Prinzip — wir wollen es vorläufig als „Ordnungsprinzip“ bezeichnen — besagt, daß jeder geordnete Zustand nach einem Maximum seines Ordnungsgrades oder — was ungefähr auf das gleiche hinauskommt — nach Erhaltung des Ordnungsgrades strebt. Beachten wir nun, daß nach Gl. (8) das Magnetfeld eine Verminderung des Ordnungsgrades bewirken muß, so entspricht die Entstehung des Abschirmstromes der Tendenz nach dem Maximum des Ordnungsgrades. Diese würde also sozusagen im Falle des Meißner-

Ochsenfeld-Effektes ($H = \text{konst.}$) das nur für veränderliche Magnetfelder gültige Induktionsgesetz vertreten. Eine eingehendere Untersuchung des Verhaltens der Supraleiter im Magnetfeld ergibt nun das überraschende Resultat, daß die Beschreibung der Vorgänge durch das Ordnungsprinzip in mehreren Fällen gleichwertig neben die durch das Induktionsgesetz tritt, in einzelnen Fällen sich dieser aber sogar als überlegen erweist. Was das für die Induktionserscheinungen im Normalleitzzustand bedeutet, soll in den Schlußbemerkungen kurz angedeutet werden. Ehe wir aber an diese Untersuchungen herangehen, sind einige vorbereitende Worte zum Problem der Makroströme am Platze, die bei weiterer Verfolgung auch die Dynamik des Meißner-Ochsenfeld-Effektes aufhellen könnten.

Man kann sich einen geordneten Zustand im Supraleiter kaum anders vorstellen, als in Form einer Ausrichtung spontaner Elementarströme, die aus zahlreichen Atomen bestehende Mikrobereiche umfassen. Von dieser Vorstellung wurde schon in der vorhergehenden Arbeit¹ Gebrauch gemacht. Die Parallelstellung solcher Elementarströme in einem größeren Volumen dürfte unter anderem wegen der damit verknüpften magnetischen Energie sehr unwahrscheinlich sein, man wird — in Analogie zum Ferromagnetismus — eine im Mittel gleichförmige Verteilung paralleler und antiparalleler Elementarströme annehmen müssen. Es scheint aber ziemlich einleuchtend, daß in einer dünnen Oberflächenschicht aus Gründen, die mit den allgemeinen Bindungsverhältnissen zusammenhängen, ein Ordnungszustand herrscht, der nur mehr mit einer makroskopischen Ausrichtung der Elementarströme verträglich ist. Man hat an chemischen Gesetzmäßigkeiten zeigen können (Hedvallsche Störstellenwanderung⁶, daß zwischen der Oberfläche und dem Volumen eine sehr enge Kopplung besteht, die nicht über den langsam wirkenden Mechanismus der Diffusion geht. Dies ließe uns verstehen, daß das Volumen des Supraleiters in seinem Streben nach maximalem Ordnungsgrad der Oberfläche jenen Ordnungsgrad aufzwingt, der dem Abschirmstrom entspricht. Auch die energetischen Verhältnisse beim Meißner-Ochsenfeld-Effekt sprechen für eine derartige Kopplung, denn die Energie des Abschirmstromes, die gleich dem über das Volumen des Versuchskörpers erstreckten Integral $\int H^2/8\pi \cdot dV$ ist, kann nur aus der freien Energie des Gesamtvolumens entnommen werden. Dies geht aus den thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten des Übergangs $N \rightleftharpoons S$ eindeutig hervor. Die eingehendere Behandlung dieser Fragen sei besser einer gesonderten Untersuchung vorbehalten, für das folgende genügt die Erkenntnis, daß die Makroströme an der Oberfläche der Supraleiter mit einem Ordnungsgrad höheren Ranges in der Oberflächenschicht zusammenhängen.

2. Die Entstehung des Abschirmstromes in einem Supraleiter, der zuerst abgekühlt und dann bei $T = \text{konst.}$ in ein Magnetfeld gebracht wird, ist nichts anderes als ein Spezialfall des Skin-Effekts. Die Maxwellschen Gleichungen liefern für die Eindringtiefe d des Feldes den Ausdruck

$$d = c^2 / \sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}. \quad (9)$$

Im Supraleiter können wir $\mu = 1$ annehmen, für σ müssen wir nach den Abschätzungsversuchen von P. Graßmann⁷ als untere Grenze 10^{32} cgs. Einh. setzen, nehmen wir noch für als unterste Grenze (Fourier-Zerlegung des Einschaltvorganges) 2π an, so erhalten wir für d den Näherungswert 10^{-6} cm. Nach (9) wäre die Eindringtiefe von der Frequenz, also von der Geschwindigkeit des Einschaltvorganges, abhängig. Es wird kaum möglich sein, an Makrokörpern eine solche Abhängigkeit nachzuweisen. Was die Erscheinungen in dünnen Filmen, kolloidalen Kügelchen usw. anlangt, erfordern sie auf jeden Fall eine gesonderte Untersuchung.

⁶ J. A. Hedvall: Die Chemie 55, 334 (1942).

⁷ P. Graßmann: Physik. Z. 36, 256, 525 (1935).

Nach unserer Abschätzung ist das Feld im Inneren des Versuchskörpers mit Ausnahme einer dünnen Oberflächenschicht überall gleich Null. Die Verteilung des Oberflächenstromes, der die Kompensation des Feldes im Inneren bewirkt, ist aus der bekannten Feldverteilung an der Oberfläche mit Hilfe von $\text{rot } H = 4\pi i/c$ zu gewinnen. Steigern wir die Feldstärke, so steigt auch der Oberflächenstrom, senken wir sie, so muß er abnehmen, so daß immer die Abschirmung aufrecht erhalten bleibt. Dies gilt natürlich nur, solange $H < H_k$ bleibt. Die Versuche bestätigen diese Folgerungen. Zwar ist der Abschirmstrom aus begreiflichen Gründen nicht unmittelbar meßbar, dagegen kann die Feldverteilung an der Oberfläche des Versuchskörpers (die $\mu = 0$ entsprechen muß) oder das magnetische Moment und schließlich auch die Abschirmwirkung in dünnen, zum Feld parallelen Bohrungen gemessen werden.

Bei oberflächlicher Betrachtung erscheint uns die Entstehung des Abschirmstromes im ansteigenden Magnetfeld ungleich selbstverständlicher als der Meißner-Ochsenfeld-Effekt. Das liegt daran, daß wir formal mit dem zeitlich wechselnden magnetischen Fluß eine elektrische Randspannung verknüpfen, die die Leitungselektronen nach der vertrauten Grundgleichung $b = e \cdot E/m$ in Bewegung versetzt. Genauer gesehen, ist es aber ja nur der Induktionsstrom, den wir in Abhängigkeit von dH/dt beobachten, das elektrische Wirbelfeld ist dagegen eine reine Hilfsgröße, die uns die Beschreibung der Vorgänge erleichtern soll. So gesehen, ist die Ableitung des Abschirmstromes aus den Maxwell'schen Gleichungen in keiner Weise selbstverständlicher, als die des Meißner-Ochsenfeld-Effektes aus der Tendenz nach maximalem Ordnungsgrad. Es wäre daher durchaus berechtigt, die oben besprochenen Erscheinungen im wechselnden Magnetfeld der gleichen Tendenz nach dem maximalen Ordnungszustand unterzuordnen, den Abschirmeffekt im wechselnden Magnetfeld also nur als eine Verallgemeinerung des Meißner-Ochsenfeld-Effektes anzusehen, die nebenher auch durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben werden kann. Wir nähern uns damit eigentlich der Formulierung Londons,⁸ der die den Abschirmeffekt beinhaltende Gleichung $\text{konst. rot } i = -H^9$ als Postulat an die Spitze stellt und damit die Vorgänge bei $H = \text{konst.}$ und bei $H = H(t)$ dem gleichen, klassisch nicht weiter deutbaren Mechanismus unterordnet. Unser Versuch, die Entstehung des Abschirmstromes aus der Tendenz nach dem Maximum des Ordnungsgrades abzuleiten, könnte demnach in gewissem Sinn als Weiterentwicklung der Londonschen Theorie angesehen werden.

3. Es soll nicht verschwiegen werden, daß es ein Versuchsergebnis gibt, das sich fürs erste nicht ganz befriedigend in diese Überlegungen einordnen läßt. Bringen wir einen supraleitenden Hohlzylinder in ein zu seiner Achse paralleles Feld, so entsteht ein Abschirmstrom, der das äußere Feld auch im Hohlraum verdrängt. Der Hohlzylinder verhält sich also sozusagen so, als ob er massiv wäre. Das gleiche gilt unter denselben Versuchsbedingungen auch für eine Hohlkugel. Anders, wenn wir den Hohlzylinder im konstanten Feld abkühlen. In diesem Fall wird die Feldverdrängung nur aus der Wandung des Hohlzylinders beobachtet, im Hohlraum bleibt das Feld erhalten. Um diesen Zustand zu erklären, müssen wir einen Strom i_1 an

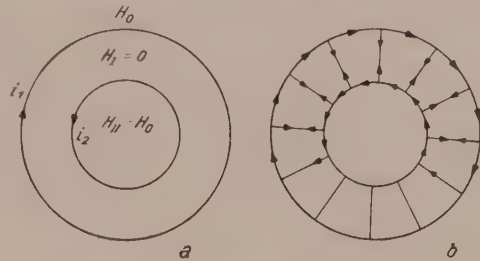


Abb. 5. Stromverteilung in einem supraleitenden Hohlzylinder, H_0 senkrecht zur Zeichenfläche.

⁸ F. London: Une Conception Nouvelle de la Supra-Conductibilité. Paris. 1937.

⁹ In dem Wert der Konstanten ist nach London die etwas hypothetische Zahl der „Supraleitelektronen“, ferner die Ladung und die Masse der Elektronen enthalten.

der Außenfläche annehmen, dessen Feld im Inneren gleich $-H_0$ ist, und einen Strom i_2 an der Innenfläche, dessen Feld gleich $+H_0$ ist. Wir haben demnach in der Wandung: $H_I = H_0 - H_{i1} = 0$; im Hohlraum: $H_{II} = H_0 - H_{i1} + H_{i2} = H_0$ (Abb. 5a). Der Zustand ist aber $-$ und hier liegt möglicherweise ein entscheidender Faktor $-$ durch keinerlei Messungen von einem solchen zu unterscheiden, wie ihn Abb. 5b als Beispiel darstellt, also Mikroströme gleicher Richtung, die sich innerhalb der Wandung aufheben.

Thermodynamisch sind alle diese Zustände gleichwertig, denn für die Energiebilanz kommt nur das über den Supraleiter erstreckte Integral $\int H^2/8\pi \cdot dV$ in Betracht. Sie sind aber auch vom Standpunkt des Ordnungsprinzips gleichwertig, denn auch für dieses ist nur die Verdrängung des Feldes aus dem von Materie erfüllten Raum wichtig. Es muß hier also noch ein anderer Faktor mitspielen, der sich vorläufig unserem Verständnis entzieht. Vielleicht liegt es einfach daran, daß beim konstanten Feld die Energie der Ströme aus der freien Energie des Supraleiters entnommen werden muß, daher die weniger Energie beanspruchende Lösung bevorzugt wird, während bei $H = H(t)$ das äußere Feld die Energie liefert.

4. Es gibt aber auch Erscheinungen, bei denen ganz offensichtlich der Mechanismus des Induktionsgesetzes zugunsten des Meißner-Ochsenfeld-Effektes ausgeschaltet ist, die also das Primat des Ordnungsprinzips ganz besonders eindeutig demonstrieren. So können wir z. B. den Effekt der Feldverdrängung beim Übergang $N \rightarrow S$ auch bei konstanter Temperatur erzielen, wenn wir das Magnetfeld von überkritischen Werten allmählich zu unterkritischen absinken lassen. In diesem Fall hätten wir nach klassischen Vorstellungen mit einem Induktionsstrom zu rechnen, der dem Abschirmeffekt gerade entgegenwirkt, zumindest aber sich in einer Jouleschen Wärme äußern müßte. Wir beobachten aber lediglich den vollen Abschirmeffekt, die Umwandlungswärme entspricht mit größter Genauigkeit dem aus Reversibilitätsbetrachtungen ermittelten Wert. Genau das gleiche gilt für die Zerstörung der Supraleitung durch ein über H_k gesteigertes Feld, auch in diesem Fall sind nicht einmal Spuren von Joulescher Wärme festzustellen. Man könnte sagen, daß die Vernichtung des Abschirmstromes durch einen Mechanismus erfolgt, der sozusagen die Umkehr des Meißner-Ochsenfeld-Effektes darstellt.

Bekanntlich entsteht ein scheinbar dem Induktionsgesetz entsprechender Dauerstrom in einem Hohlzylinder (Ring), wenn wir nach Abkühlung im konstanten Magnetfeld und Einstellung des durch Abb. 5 dargestellten Abschirmeffektes das äußere Feld abschalten. Das Feld des Induktionsstromes ist in diesem Fall dem ursprünglichen Feld gleichgerichtet. Nun kann man aber feststellen, daß dieser Dauerstrom nur an der Innenfläche des Hohlzylinders (Ringes) fließt. Es ist also so, als wenn einfach i_2 (Abb. 5a) erhalten geblieben und beim Abschalten des Feldes lediglich i_1 vernichtet worden wäre. Dies würde aber wieder dem Ordnungsprinzip entsprechen, denn durch das Abschalten des äußeren Feldes bekäme H_{i1} in der Wandung das Übergewicht und würde den Ordnungsgrad reduzieren, aus der Tendenz nach Aufrechterhaltung des Ordnungsgrades muß sich demnach die Reduktion von i_1 , ganz so wie bei einem massiven Versuchskörper, ergeben.

Man kann die Ergebnisse dieses Abschnittes auch in folgender Form zusammenfassen. Nach der klassischen Theorie ist mit einem dH/dt ein elektrisches Wirbelfeld verknüpft, das seinerseits erst die Ströme im Leiter auslöst. Dieses Wirbelfeld hat durch die Erfolge, die mit seiner Verwendung verbunden waren, eine Art ursprünglicher physikalischer Realität gewonnen. Zufolge der hier vertretenen Auffassung wird das elektrische Wirbelfeld, zumindest im Supraleiter, durch die Begleiteffekte des Ordnungsprinzips abgelöst, die ihrerseits eine unmittelbare Reaktion des Ordnungs-

zustandes auf dem Momentanwert des Magnetfeldes darstellen. Es ist also tatsächlich so, wie es London postuliert hat, der Strom eine unmittelbare Funktion des Magnetfeldes. Die Extrapolation dieser Erkenntnisse für den Normalleitzustand ist ein Problem für sich.

Schlußbemerkungen.

Wir haben hier die von Bragg und Williams eingeführte Beschreibung des Ordnungszustandes ohne weitere Kritik übernommen und zu zeigen versucht, daß man durch die Hinzufügung der Annahme, die Wirkung eines Magnetfeldes auf den geordneten Zustand bestünde in der Veränderung der Ordnungsenergie V_0 , einige wesentliche Züge des Verhaltens der Supraleiter im Magnetfeld beschreiben kann. Unser Verfahren steht in einem prinzipiellen Gegensatz zu dem sonst in der klassischen Physik geübten, bei dem zuerst die Wirkung des Magnetfeldes (und analog die des elektrischen Feldes) auf die einzelnen Partikel (Spins, Ladungen) angesetzt, dann allerdings durch die Statistik eingeschränkt wird. Es scheint, daß unser Verfahren in einem Zusammenhang mit dem von der Quantenmechanik geübten steht, bei welchem dem aus N Partikeln bestehenden System eine Hamilton-Funktion zugeordnet und die Wirkung eines äußeren Feldes als Störungsglied eingeführt wird. Dieses Verfahren der Quantenmechanik überträgt einen Grundgedanken der Atomphysik auf die Physik des Kristalls, einen Gedanken, der von seiner mathematischen Formulierung losgelöst, so ausgedrückt werden könnte: die Änderungen des Quantenzustandes eines Atoms stehen mit den äußeren Kräften in keinem Kausalzusammenhang; sie erfolgen im wesentlichen spontan und werden durch die äußeren Kräfte lediglich ausgelöst. Nur die Wahrscheinlichkeit der Quantensprünge innerhalb einer sehr großen Anzahl von Atomen gehorcht dem Kausalgesetz. Wir müssen demnach auch dem Kristall Quantenzustände zuschreiben, die nur über eine Wahrscheinlichkeitsfunktion mit den äußeren Feldern verknüpft sind. Daß diese Quantenzustände fast nie in Erscheinung treten, liegt daran, daß es eine vieldimensionale Mannigfaltigkeit von Zuständen gibt, so daß die Übergänge scheinbar stetig erfolgen. Bis zu einem gewissen Grad wird dieser Sachverhalt durch die moderne Elektronentheorie des festen Körpers mit ihren „Energiezonen“ (Energiebändern im zweidimensionalen Modell) zum Ausdruck gebracht. Der „Ganzheitscharakter“ (wenn man so sagen darf) des Kristalls kommt in dieser Theorie zweifach zum Ausdruck: erstens in der Nichtlokalisierbarkeit der Anregungszustände, und zweitens, was fast dasselbe ist, in der Anwendbarkeit der Fermistatistik.

Bekanntlich hat H. Bethe¹⁰ eine grundsätzliche Ergänzung der Braggschen Theorie versucht, bei der er von der Wechselwirkung der „nächsten Nachbarn“ ausging. Dieser Versuch erwies sich zunächst als rechnerisch undurchführbar, und Bethe mußte sich schließlich damit begnügen, eine Korrektur der Braggschen Theorie durch die Einführung einer zusätzlichen Nahewirkung zu erzielen, die möglicherweise mit den Tatsachen besser übereinstimmt. Aus Bethes Überlegungen geht aber — und auch dies ist ein positives Resultat — klar hervor, daß die Ansätze von Bragg und Williams an die Voraussetzung geknüpft sind, alle Atome, ohne Rücksicht auf ihre Lage, seien „nächste Nachbarn“ und trügen gleich viel zur Ordnungsenergie eines beliebig herausgegriffenen Atoms bei. Demnach dürfte zwischen der Theorie der Ordnungszustände und der oben erwähnten Nichtlokalisierbarkeit der Zustände im Kristall ein äußerst enger Zusammenhang bestehen.

In einer nächsten Veröffentlichung soll gezeigt werden, daß die Wirkung elektrischer Felder nach dem gleichen Schema behandelt werden muß, das hier für magnetische Felder angewendet wurde. Ferner wird gezeigt werden, daß dies auch außerhalb

¹⁰ H. A. Bethe: Proc. Roy. Soc. [London] **150**, 552 (1935).

des Bereiches der Supraleitung, des Ferromagnetismus (und der Seignette-Elektrizität) gilt, denn der Kristall stellt ja schon an und für sich einen Ordnungszustand dar, der sich nur durch den Grad von den hier behandelten unterscheidet. Wir werden im besonderen die Wirkung des elektrischen Feldes auf den Normalleiter mit Erfolg durch die Annahme einer nur mittelbaren Einwirkung des Feldes auf die Leitungselektronen beschreiben können. Es wird sich schließlich zeigen, daß dies nur eine Fortführung eines Grundgedankens der Lorentzschen Elektronentheorie ist.

Damit wird aber auch das letzte Ergebnis unserer vorliegenden Untersuchung: die Zurückführung des Induktionsgesetzes auf das Ordnungsprinzip, auf die Normalleiter übertragbar. Man könnte kurz sagen: die Tendenz zur Aufrechterhaltung des Ordnungsgrades erweist sich ganz allgemein als das physikalische Korrelat der die Induktionsgesetze zusammenfassenden Lenzschen Regel.

(Eingegangen am 20. April 1948.)

Nachtrag.

Wir haben in den vorangehenden Zeilen darauf hingewiesen, daß die Entstehung des Abschirmstromes in einem Supraleiter bei Abkühlung im konstanten Magnetfeld (Meißner-Ochsenfeld-Effekt) grundsätzlich verstanden wird, wenn man eine Steuerwirkung des Gesamtgitters auf den Ausrichtungszustand der Oberflächenschicht annimmt, die ein Begleiteffekt der Tendenz nach dem Maximum des Ordnungsgrades sein soll. Dabei war vorausgesetzt worden, daß die Oberflächenschicht infolge der in ihr vorherrschenden besonderen Bindungsverhältnisse zu einer bevorzugten Ausbildung in der Fläche gelegener Elementarströme neigt. Das heißt aber auch, daß die Oberflächenschicht eben wegen dieser besonderen Bindungsverhältnisse ein Teilsystem mit einer gewissen thermodynamischen Selbständigkeit darstellt.

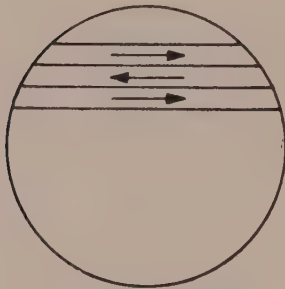


Abb. 6. Stromverteilung an der Oberfläche einer supraleitenden Kugel (H parallel z -Achse) vor der Ausbildung des Makrostromes.

Man hat bisher immer wieder versucht, den Zustand des Supraleiters mit Oberflächenstrom als einen thermodynamisch tiefsten Zustand darzustellen. Auch Heisenberg gebraucht in seiner Arbeit zur Theorie der Supraleitung¹¹

noch diese Formulierung. Überraschenderweise kommt man aber gerade dann zu einem sehr befriedigenden Verständnis des Meißner-Ochsenfeld-Effektes, wenn man annimmt, daß der Zustand mit Makrostrom für die im obigen Sinn aufgefaßte Oberflächenschicht einen Ordnungszustand verminderten Grades bedeutet. Das kommt darauf hinaus, daß wir als Ordnungszustand höchsten Grades einen Zustand annehmen, bei dem die Elementarströme nach allen Achsenrichtungen gleichmäßig ausgerichtet sind. Die den Ordnungsgrad vermindernde Wirkung des Magnetfeldes soll nach dieser Annahme eben gerade darin bestehen, daß das Feld die Elementarströme begünstigt, deren Ebene auf H senkrecht steht, wobei zunächst beide Richtungen gleichberechtigt sind. Das Magnetfeld soll somit dem Supraleiter einen zweidimensionalen Ordnungszustand aufzwingen, dessen Ordnungsenergie V_0 geringer ist, als die des dreidimensionalen Zustandes ohne Feld. Versucht man, diese Annahme auch auf die Oberflächenschicht zu übertragen, so kommt man zu dem Schluß, daß sich hier im Magnetfeld nur mehr Ringströme ausbilden können, die den Versuchskörper als Ganzes umschließen, wobei die Nebenforderung nach dem Minimum der magnetischen Energie zunächst dazu führt, daß sich diese Ringströme nur in schmalen Zonen senkrecht

¹¹ Zeitschrift für Naturforschung, 2a, 185, 1947.

zu H , und zwar so ausbilden, daß die Ströme in benachbarten Zonen jeweils entgegengesetzt fließen (Abb. 1).

Die weitere Ausrichtung der Elementarströme zu einem makroskopischen Oberflächenstrom liegt energetisch noch höher als der durch Abb. 1 veranschaulichte Zustand. Wir dürfen annehmen, daß diese Energiedifferenz verhältnismäßig gering ist gegenüber der magnetischen Energie des Makrostromes. Die spontane Entstehung eines derartigen Oberflächenstromes ist also keinesfalls zu erwarten. Dagegen darf man wohl ohne besondere Bedenken annehmen, daß der Ausrichtungszustand der Oberflächenschicht infinitesimalen Schwankungen unterworfen ist. Sofern diese Schwankungen in der Richtung zu höherer Ordnung (isotrope Verteilung der Elementarströme) liegen, werden sie durch das Magnetfeld wieder abgebremst. Dagegen werden die Schwankungen umgekehrter Richtung (Ausbildung von Makroströmen, deren Ebene zu H senkrecht ist) vom Magnetfeld nicht beeinflusst. Ein derartiger Makrostrom ist aber mit einem — zunächst natürlich ebenfalls unendlich kleinen — Magnetfeld verbunden, das dem primären Feld gleich oder entgegengesetzt gerichtet sein kann. Im ersten Fall bewirkt die Schwankung eine infinitesimale Reduktion des Ordnungsgrades im Inneren des Versuchskörpers, die zur Aufrechterhaltung der Temperatur die Zufuhr eines Energiebetrages dE erfordert. Da nach unserer Grundannahme die Schwankung selber schon einen Energieaufwand erfordert, bedeutet dies, daß durch die Kopplung: Oberflächenzustand — Volumszustand aus der Schwankung des Teilsystems eine vergrößerte Schwankung des Gesamtsystems entstehen würde, ein Vorgang, der zweifellos sehr unwahrscheinlich ist. Dazu kommt noch die magnetische Energie des „Makrostromes“, die aus der inneren Energie des Versuchskörpers aufgebracht werden müßte. Solche Schwankungen werden somit durch die Kopplung sofort wieder abgebremst. Ist aber das Magnetfeld der „Schwankung“ dem primären Feld entgegengesetzt, so wird der Ordnungszustand im Inneren um einen kleinen Betrag erhöht, dadurch wird ein Energiebetrag dE frei, der zur weiteren Ausrichtung des Makrostromes (das heißt zur Erniedrigung des Ordnungszustandes und zum Aufbau der magnetischen Energie des Makrostromes) verwendet werden kann. Verstärkung des Makrostromes bedeutet aber wieder weitere Erhöhung des Ordnungszustandes im Inneren, also weiteres Freiwerden von Gitterenergie: es setzt also eine regelrechte Rückkopplung zwischen Oberflächen- und Volumszustand ein, die offensichtlich solange wirksam ist, bis der Ordnungszustand im Inneren ein Maximum geworden ist. Das ist gleichbedeutend mit der Ausbildung eines Oberflächenstromes, dessen Magnetfeld das primäre Feld im Inneren des Versuchskörpers völlig kompensiert (Abschirmstrom = Meißner-Ochsenfeld-Effekt).

Nach dieser Interpretation bedeutet somit der Zustand des Supraleiters im Magnetfeld einen Zustand tiefster potentieller Energie des Gesamtgitters (Maximum des Ordnungsgrades = Minimum von E_{pot}), der durch einen Zustand höherer potentieller Energie in einem Teilsystem erkauft wird. Es wird also

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot, Vol}} + E_{\text{pot, Oberfl.}}$$

ein Minimum, wenn $E_{\text{pot, Vol}}$ seinen kleinsten Wert annimmt.

Die Bedeutung dieser Formulierung wird noch klarer, wenn man das Verhalten supraleitender Hohlkörper analysiert (vgl. den vorhergehenden Aufsatz, S. 351). Kühlen wir im konstanten Magnetfeld ab, so haben wir den Ausrichtungszustand zweier Oberflächenschichten zu berücksichtigen (äußere und innere) und daher mit einer resultierenden potentiellen Energie, die aus drei Summanden besteht. Der Zustand tiefster Energie wäre in diesem Fall der, der mit der Ausbildung eines Abschirmstromes auf der Außenfläche verbunden ist, weil in diesem Fall auch die Innen-

fläche den Zustand tiefster Energie (ohne Makrostrom) annehmen kann. Dieser Zustand ist aber mit einer großen magnetischen Energie ($\int H^2/8\pi \cdot dV$, erstreckt über das gesamte Volumen) verknüpft. Der tatsächlich zustande kommende Zustand (Abschirmstrom an der Außenfläche, Gegenstrom an der Innenfläche, vgl. Abb. 5 auf S. 351) erfordert eine magnetische Energie, die nur dem über die Wandung des Hohlzylinders erstreckten Integral entspricht.

Wenn wir dagegen den Hohlzylinder zuerst abkühlen, so daß sich der Zustand tiefster potentieller Energie sowohl im Volumen, als auch in den Oberflächen ausbilden kann, und dann das Magnetfeld einschalten, so wird in diesem Fall die magnetische Energie des Abschirmstromes der magnetischen Energie des primären Feldes entnommen. In diesem Fall bleibt die Innenfläche in ihrem Zustand höchsten Ordnungsgrades (= stromlos), der entstehende Gesamtzustand entspricht somit in zweifacher Hinsicht einem Minimum der potentiellen Energie: nämlich sowohl vom Standpunkt des Versuchskörpers aus, da jetzt in der Summe $E_{\text{pot, Vol}} + E_{\text{pot, Oberfl.}} + E_{\text{pot, Innenfl.}}$ sowohl der erste als auch der dritte Summand ihren Minimalwert aufweisen, als auch vom Standpunkt des aus Magnetisierungsspule und Versuchskörper bestehenden Systems, dessen Feldenergie um den Betrag $\int H^2/8\pi \cdot dV$, erstreckt über das gesamte, von der Außenfläche umschlossene Volumen, vermindert ist.

In der thermodynamischen Behandlung der Umwandlung normal = supra-leitend nimmt man allgemein an, daß die magnetische Energie des Abschirmstromes gerade gleich der Differenz der freien Energie im normal- und supraleitenden Zustand sei. Die bisher untersuchten Tatsachen sprechen eigentlich nur dafür, daß

$$f_n - f_s \cong H^2/8\pi$$

ist. Die Entscheidung, ob hier das Gleichheits- oder das Größerzeichen gilt, könnte durch systematische Versuche an Hohlzylindern verschiedener Wandstärke herbeigeführt werden. Für den Fall, daß das Größerzeichen gilt, müßte sich nämlich mit wachsender Wandstärke ein Überwiegen des Abschirmstromes an der Außenfläche zeigen. Aber auch sonst dürften systematische Versuche an Hohlkörpern geeignet sein, die hier entwickelten Vorstellungen zu prüfen und eventuell ihre quantitative Formulierung vorzubereiten.

Eingegangen am 19. April 1949.

Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper.

I. Allgemeine Theorie.

Von E. Skudrzyk, Wien.

Zusammenfassung. Die elastischen Grundgleichungen werden auf eine allgemeine Art abgeleitet und dabei sowohl die elastische Nachwirkung, als auch die elastische Fernwirkung, wie sie z. B. durch den Temperatúrausgleich zwischen komprimierten und dilatierten Stellen hervorgerufen wird, besprochen. Es wird gezeigt, daß die Reibungsverluste nur durch eine unendliche Zahl von Materialkonstanten berücksichtigt werden können, die sich aber auf zwei reduzieren, wenn die Bewegung harmonisch verläuft. Dann können die Reibungskonstanten sogar als Imaginärteile der Elastizitätskonstanten aufgefaßt werden. Die Existenz zweier Reibungskonstanten hat zur Folge, daß die Dämpfung mechanischer Schwingungen von ihrer besonderen Art abhängt; nur die tiefen Frequenzen scheinen häufig eine Ausnahmstellung infolge des Überwiegens von Hystereseeffekten einzunehmen. Schließlich werden die Beziehungen zwischen den verschiedenen komplexen Elastizitätskonstanten und ihren Verlustwinkeln, das heißt den Reibungskonstanten, in Tabellenform zusammengestellt.

Summary. The fundamental elastic equations for the deformations of solids are derived, and the elastic after-effects as well as elastic long distance effects (temperature equalizations between compressed and extended portions of a material) are discussed. It is shown, that frictional

losses can only be taken into account if an infinit number of constants depending on the material are considered. Harmonic motion, however, reduces the number of constants to two. In that case, the frictional constants can even be considered imaginary parts of the elastic constants. The damping of mechanical vibrations depends on the characteristics of the two frictional constants; only the low frequencies frequently seem to make an exception owing to the predominance of hysteresis effects. In case of harmonic motion the losses can be taken into account in an exact manner by using comple elastic constants and an complex Poisson's number m . The relations between the different loss factors are derived and tabulated as a function of two primitive constants.

Résumé. On dérive de la manière générale les équations fondamentales de l'élasticité et on discute les effets élastiques postérieurs ainsi que les effets élastiques à distance, comme ceux que provoque par exemple l'équilibre de température entre parties comprimées et dilatées. On montre que les pertes dues à la friction ne peuvent être exprimées qu'en fonction d'un nombre infini de constantes, qui peuvent toutefois être réduites à deux lorsque le mouvement est harmonique. Dans ce cas on peut même considérer les constantes de friction comme les parties imaginaires des constantes d'élasticité. L'amortissement des oscillations mécaniques est fonction des caractéristiques des constantes de friction: seules les basses fréquences semblent faire souvent exception en raison de la prédominance d'effets d'hystérésis. Dans le cas du mouvement harmonique on peut tenir compte des pertes exactement en utilisant des constantes d'élasticité complexes. Enfin on a rassemblé dans un tableau les relations entre les différentes constantes d'élasticité complexes et leur angle de perte, c'est à dire les constantes de friction.

1. Einleitung.

Ein Studium der inneren Reibung und der Materialverluste fester Körper ist physikalisch interessant und aufschlußreich und für die Praxis von großer Bedeutung. Es ist unter anderem seit langem bekannt, daß Materialfehler, innere Risse usw. sich oft in einer erhöhten Dämpfung verraten und daß für gleiche Zwecke bevorzugte Werkstoffe häufig ähnliche Dämpfungen aufweisen; Kugellagerstähle¹ zeichnen sich immer durch eine besonders geringe, Eisensorten, die in der Bautechnik bevorzugt werden,² durch eine meist stärkere Dämpfung aus. Es liegen Hinweise vor, daß auch Bearbeitung³ eine Veränderung der Materialdämpfung bewirkt.

Die bisher veröffentlichten Ergebnisse stammen mit wenigen Ausnahmen von Torsions- und Schwingungsversuchen bei Frequenzen zwischen 1 und 1500 Hz.⁴ Ihnen kann aber nur beschränkte Bedeutung zugemessen werden, da bei tiefen Frequenzen, besonders bei Metallen, die Wärmeleitungs-dämpfung,^{5, 6} überwiegt, die überdies noch von der besonderen Form des Werkstückes abhängt. Messungen bei tiefen Frequenzen geben daher im wesentlichen nur über die Wärmeleitfähigkeit des Materials Auskunft.

Bedeutend günstiger liegen die Verhältnisse bei hohen Frequenzen. Die gewöhnliche Wärmeleitungs-dämpfung spielt hier keine Rolle mehr, so daß die Dämpfung von der Form des Werkstückes unabhängig und nur durch die Eigenschaften des inneren Gefüges und dessen Struktur⁷ bestimmt wird. Es liegt deshalb nahe, Dämpfungsmessungen bei hohen Frequenzen zur Untersuchung von Stoffen heranzuziehen, zumal eine Reihe innerer Eigenschaften gerade durch die Dämpfung besonders klar angezeigt wird. Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß z. B. bei Helium durch Dämpfungsmessungen die Existenz eines He-Moleküls eindeutig nach-

¹ Geiger-Scheel: Handbuch der Physik, Bd. VI, Kap. I, Ziffer 23, S. 34.

² O. Föppl: Schweiz. Bau-Ztg. 86, Nr. 23 (1925).

³ Cl. Zener: Physic. Rev. 53, 582 (1938).

⁴ Vgl. z. B. K. Bennewitz und H. Rötger: Physik. Z. 37, 578 (1936); Z. techn. Physik 19, 521 (1938).

⁵ Cl. Zener: Physic. Rev. 53, 582 (1938).

⁶ Die Wärmeleitungs-dämpfung wird durch Temperatenausgleich zwischen komprimierten und dilatierten Stellen hervorgerufen und ist wohl zu unterscheiden von der thermischen Dämpfung bei hohen Frequenzen, die durch Wärmeströmung infolge der Anisotropie der inneren Kristallite bedingt ist.

⁷ Cl. Zener: Physic. Rev. 52, 230 (1937); 53, 90 (1938).

gewiesen werden konnte,⁸ ein Ergebnis, das spektroskopische Untersuchungen bestätigen. Die inneren Schwingungen dieses Moleküls erhöhten die Schalldämpfung auf das Fünffache, während z. B. die spezifische Wärme nur um 3⁰/₀₀ vermehrt wurde. Es wäre im Hinblick auf solche Möglichkeiten sogar zu erwägen, künftig Materialien neben den üblichen Angaben, wie Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Bruchfestigkeit usw. auch durch ihre innere Dämpfung bei hohen Frequenzen, z. B. zwischen 1 kHz und 600 kHz zu charakterisieren, wobei wesentlich ins Gewicht fällt, daß Dämpfungsmessungen äußerst einfach und ohne Beschädigung oder Veränderung des Werkstückes innerhalb weniger Sekunden durchführbar sind; man klebt einen kleinen Quarz mittels eines Wassertropfens an die Probe und zeichnet den Abklingvorgang mit einem logarithmischen Schnellpegelschreiber und einem kleinen Seignettesalz-Tastmikrophon als Empfänger auf (vgl. Theorie der inneren Reibung fester Körper, Materialverluste II). Die Neigung der sich ergebenden Geraden ist dann der Dämpfung unmittelbar proportional. Sowohl innere Fehler, als auch der Grad der Bearbeitung ließen sich so durch einfache Dämpfungsmessungen kontrollieren. Auch dürften solche Beobachtungen ein Urteil über Bruch- und dynamische Festigkeit ähnlich gearteter Werkstoffe ermöglichen.

In einer früheren Arbeit haben wir uns mit der inneren Reibung, d. h. den Materialverlusten in Gasen und Flüssigkeiten beschäftigt. Im folgenden soll die Theorie für feste Körper erweitert und neu abgeleitet werden; zuvor seien jedoch einige der Ergebnisse in Erinnerung gebracht, soweit sie zum besseren Verständnis der Verhältnisse bei festen Körpern beitragen können, die bereits wesentlich schwieriger zu übersehen sind. Dort wurde gezeigt, daß außer der bekannten Zähigkeit μ eine von dieser unabhängige Volumenviskosität λ auftreten muß. Besondere Aufmerksamkeit war dabei der Tatsache zu widmen, daß bei der Kompression neben der Volumenviskosität auch die Zähigkeit des Mediums zu einem Reibungsglied Anlaß gibt. Die klassische Stokes-Kirchhoffsche Theorie brachte die beiden Reibungskonstanten μ , λ in Beziehung zueinander, indem sie $\lambda + \frac{2}{3} \mu = 0$ setzte. Wir haben die Unhaltbarkeit dieser „Stokesschen Hypothese“ auf mehrfache Art nachgewiesen und damit erkannt, daß bereits bei Gasen und Flüssigkeiten zwei voneinander völlig unabhängige Verlustkonstanten auftreten; beide Arten der Reibung mußten als Ausläufer von Relaxationsvorgängen gedeutet werden. Die Zähigkeitsreibung brachte, wenigstens bei Gasen, die Tatsache zum Ausdruck, daß das Medium aus Molekülen aufgebaut ist, die außer annähernd verlustlosen Zusammenstößen in keiner nennenswerten Wechselwirkung stehen. Entsprechend war ihre Relaxationszeit von der Größenordnung des mittleren Zeitintervalls zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen einer Molekel. Die Kompressionsreibung wurde bei Gasen auf nicht vollkommen elastische Zusammenstöße, d. h. auf die Anregung intramolekularer Schwingungen zurückgeführt, die sich bei Flüssigkeiten, die bekanntlich kristallin-amorpher Struktur sind, auf ganze Molekülgruppen ausdehnen können. Die Relaxationszeit war so gleich der Einschwingzeit dieser Schwingungen, bzw. quantenmechanisch, gleich der Lebensdauer der entsprechenden Schwingungsquanten. In der Kompressionsreibung spiegeln sich also bereits Einzelheiten der molekularen und innermolekularen Vorgänge wieder,⁹ im Gegensatz zur Zähigkeits- (Schub-) Reibung, die bei Flüssigkeiten und Gasen noch eine Sonderstellung einnimmt.

⁸ E. Skudrzyk: *Physica Acta Austriaca* **2**, 148 (1948). — *Maschinenbau und Wärmewirtschaft* **3**, 7 (1948).

⁹ Die Kompressionsreibung war im Grenzfall des idealen Gases, der z. B. durch Stickstoff (nicht aber durch die Edelgase) realisiert wurde, Null, konnte aber bei realen Gasen die Zähigkeitsreibung um mehr als den Faktor 100 übertreffen (O_2 , CO_2), bei Flüssigkeiten sogar um mehr als den Faktor 2000 (CS_2).

Weiters mußten wir feststellen — und das ist für die Fortführung der Theorie von gewisser Bedeutung —, daß die klassische Definition des Druckes als Mittelwert der Hauptspannungen physikalisch sinnlos ist, da diese Größe keinerlei direktes Maß für die innere Beanspruchung des Stoffes darstellt. Dazu kommt, daß das menschliche Ohr, ein Mikrophon oder ein gewöhnliches Manometer immer nur die Normalspannung, niemals aber deren räumlichen Mittelwert als Druck registrieren würde. Diese formale Druckdefinition ist es denn auch, die die klassische Theorie in die aufgezeigten Schwierigkeiten bringt und die letzten Endes für das Stokessche Fehlresultat verantwortlich ist. Physikalisch sinnvoll wäre es — und daran wollen wir festhalten — als Druck an einer Fläche die auf sie wirkende Normalspannung zu bezeichnen. Im Rahmen der Theorie der inneren Reibung und der Materialverluste fester Körper, der wir uns nunmehr zuwenden, erscheint die Theorie der Flüssigkeiten und Gase als einfacher Spezialfall. Da wir uns mit den Mängeln der klassischen Theorie und der gebräuchlichen Begriffsbildungen bereits auseinandergesetzt haben, können wir es uns hier erlauben, den zweckmäßigsten und einfachsten Weg einzuschlagen.

2. Die Spannungsgrundgleichungen.

Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen geht man von einem Kontinuum im mathematischen Sinn aus und schreibt diesem eine Reihe fundamentaler Eigenschaften, wie Masse, Elastizität usw., zu, so daß sein Verhalten mit dem des realen Mediums übereinstimmt. Die geforderten Eigenschaften identifizieren wir nachträglich mit denen des realen Mediums. Dabei wollen wir immer darnach streben, unsere Ansätze so allgemein als möglich zu gestalten, um erst dann durch Spezialisierung praktischen Fällen gerecht zu werden.

Den Ausgangspunkt für die Ableitung der Grundgleichungen bildet immer die Erfahrungstatsache, daß einfache Translationen eines Körpers oder Volumenelementes als Ganzes keinerlei innere Kräfte hervorrufen können, so daß die Spannungen

1. nur von den Deformationen und ihren zeitlichen und räumlichen Ableitungen,
2. von deren Integralen

3. von der Vorgeschichte der Bewegung

abhängen können. Es erweist sich für das Folgende als zweckmäßig, die Bewegung in ihre Fourierkomponenten zu zerlegen und so die Betrachtungen ohne Verlust an Allgemeinheit auf rein harmonische Vorgänge zu reduzieren. Dann ist nämlich die Vorgeschichte der Bewegung bereits in den Fourieramplituden enthalten und die Integrale sowie die übrigen interessierenden Funktionen können als konvergente Taylorreihen nach der Zeit und den Deformationen entwickelt werden (vgl. w. u.). So genügt es also, unsere Betrachtungen auf die Deformationen und ihre zeitlichen und räumlichen Ableitungen zu beschränken. Unter Deformation versteht man dabei denjenigen Anteil der Relativbewegung benachbarter Volumenelemente, der nach Abspalten der reinen Rotation übrig bleibt. Wie in der Elastizitätstheorie gezeigt wird, sind die Deformationen gegeben durch:¹⁰

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), & e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), & e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\xi \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \eta \text{ Vektor der Verschiebung.} \\ \zeta \end{array} \right.$$

¹⁰ Vgl. z. B. B. M. Plank: Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper oder eines der gebräuchlichen Lehrbücher der theoretischen Physik.

a) Verlustloses, ideal elastisches Medium.

Zunächst wollen wir annehmen, daß die Spannungen einzig von den Deformationen abhängen und das fiktive Medium, das diese Eigenschaft aufweist, als „verlustlos ideal elastisch“ bezeichnen. Es sei dabei der Einfachheit halber auch vorausgesetzt, daß das Medium homogen und isotrop ist. Dann kann man leicht durch Taylor-Entwicklung nach den Deformationen zeigen (s. Fußnote 8, S. 79), daß für kleine Deformationen (Hooksches Gesetz) die Spannungen gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ X_y &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ Z_z &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2) \quad \left. \begin{aligned} X_y &= \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ X_z &= \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \\ Y_z &= \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.2b)$$

worin μ und λ zwei Materialkonstanten bedeuten. In dem hier definierten Medium sind also die Spannungen den Deformationen direkt proportional; eine plötzliche Deformation ruft daher eine ebenso plötzliche Spannungsänderung ohne jedweden inneren Einschwingvorgang hervor. Nun sind aber die realen Medien aus Molekülen aufgebaut, die miteinander in Wechselwirkung stehen und schwingungsfähige Gebilde darstellen. Jede Deformation muß somit naturgemäß einen inneren Einschwingvorgang, d. h. eine elastische Nachwirkung verursachen.

Das verlustlos ideal elastische Medium kann daher höchstens als Grenzfall des realen Mediums für sehr langsame Änderungen, d. h. für tiefe Frequenzen angesehen werden, und dies nur unter der Voraussetzung, daß das reale Medium hysteresefrei ist (vgl. die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper II).

b) Medium mit innerer Reibung.

Als nächste Möglichkeit lassen wir eine Abhängigkeit der Spannungen nicht nur von den Deformationen, sondern auch von den Deformationsgeschwindigkeiten zu. In der Taylor-Entwicklung (3.2) müssen dann die Spannungen auch als Funktion der Deformationsgeschwindigkeiten angesetzt werden. Auf Grund der üblichen Symmetrieforderungen (Unabhängigkeit der Spannungen von der Richtung der Deformationsbewegung) kann man dann die überflüssigen Taylor-Koeffizienten eliminieren und erhält schließlich das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2 \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ Y_y &= \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2 \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ Z_z &= \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2 \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3a)$$

$$\left. \begin{aligned} X_y &= \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ X_z &= \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \\ Y_z &= \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.3b)$$

Die auf der rechten Seite neu hinzugetretenen Ausdrücke $\lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{s}$, $\mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$ usw. stellen Reibungsglieder dar und entsprechend sind auch die weiteren Materialkonstanten λ_2 , μ_2 als Reibungskonstante zu deuten. Wir stehen hier dem Fall des idealen Mediums mit innerer Reibung gegenüber, wie er z. B. in der Hydro- und Aerodynamik bei tiefen Frequenzen vorliegt. Damit haben wir auch den ersten Schritt zur Berück-

sichtigung der elastischen Nachwirkung getan. Erzeugen wir nämlich durch irgendeinen äußeren Eingriff eine plötzliche Spannungsänderung, so daß unmittelbar nachher wieder $X_x = \text{konst.}$, so gilt für alle folgenden Zeitelemente die Differentialgleichung

$$\left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2 \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \text{konst.} \quad (3.4)$$

und zwei entsprechende Gleichungen für die y, y - und die z, z -Komponente des Spannungstensors. Addition dieser drei Gleichungen unter Berücksichtigung der bekannten Kontinuitätsgleichung (da wir kleine Amplituden vorausgesetzt haben, ist $\frac{d}{dt}$ durch $\frac{\partial}{\partial t}$ ersetzbar):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{\partial \varrho}{\varrho} \quad (3.5)$$

liefert dann

$$\left[\left(\lambda_1 + \frac{2}{3} \mu_1\right) + \left(\lambda_2 + \frac{2}{3} \mu_2\right) \frac{\partial}{\partial t}\right] \operatorname{div} \mathfrak{s} = \text{konst.} \quad (3.6)$$

Die Lösung lautet:

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{\partial \varrho}{\varrho} = A + B e^{-\frac{t}{t_0}} \quad (3.7)$$

mit

$$t_0 = \frac{\lambda_2 + \frac{2}{3} \mu_2}{\lambda_1 + \frac{2}{3} \mu_1}$$

(A, B Integrationskonstante). Wir erkennen daraus, daß die Dichte der Spannungsänderung nicht unmittelbar folgt, sondern erst allmählich ihren stationären Endwert mit der Zeitkonstanten t_0 erreicht. Wir haben hier den Fall des sogenannten Voigtschen Körpers vor uns.

Erzeugen wir anderseits eine plötzliche Dichteänderung, halten aber die Dichte in der Folgezeit wieder konstant, so folgt aus (3. 6), daß anschließend an diese Dichteänderung auch wieder $X_x + Y_y + Z_z = \text{konst.}$ bzw., wenn man Y_y und Z_z der Einfachheit halber Null setzt (dünner Stab), $X_x = \text{konst.}$ Das würde aber heißen, daß die Spannung der Dichteänderung unmittelbar folgt, was offenbar im Widerspruch zur Erfahrung steht. Der Voigtsche Körper berücksichtigt somit, wie ja bekannt ist, nur einen Teil der elastischen Nachwirkung des Mediums.

c) Medium mit innerer Reibung und Relaxation.

Auch den Spannungen muß eine endliche Einstelldauer zugeschrieben werden. Wir setzen daher in Analogie zu (3. 7)

$$X_x = A' + B' e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{bzw.} \quad X_x + \tau \frac{\partial X_x}{\partial t} = 0. \quad (3.8)$$

Die Größe τ wurde von Maxwell unter dem Namen Relaxationszeit eingeführt. Damit ist auch klar geworden, wie wir das Gleichungssystem (3. 3) zu ergänzen haben, wenn wir die Relaxation, d. h. die endliche Einstelldauer der Spannungen berücksichtigen wollen; es ist ein Glied der Form $\tau \frac{\partial}{\partial t} X_x$ hinzuzuaddieren. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 unabhängige Konstantenpaare darstellen, so daß Schub- und Dilatationsanteil X_{xs} und X_{xa} der Spannungen völlig unabhängig voneinander sind und jedem seine eigene Relaxationszeit zukommt. Wir setzen also:

$$\left. \begin{aligned} X_{xa} + \tau_a \frac{\partial}{\partial t} X_{xa} &= \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{div} \mathfrak{s}, \\ X_{xs} + \tau_s \frac{\partial}{\partial t} X_{xs} &= 2 \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

usw. (τ_d Relaxationszeit des Dilatationsanteiles der Spannungen, τ_s Relaxationszeit der Schubspannungen). Diesem Gleichungssystem wird später (s. die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper II) große Bedeutung zukommen. Sein Wert beruht darin, daß bei kleinen Amplituden innere Einschwingvorgänge (bzw. die elastische Nachwirkung) tatsächlich immer exponentiell verlaufen, oder wenigstens rein formal durch eine Summe oder ein Kontinuum von Exponentialfunktionen mit verschiedenen Relaxationszeiten dargestellt werden können. Dadurch wird die unendliche Mannigfaltigkeit der a priori möglichen Nachwirkungsfunktionen auf eine kleine, spezielle Gruppe eingeengt.

Die Erweiterung des Gleichungssystems (3. 3) zu (3. 9) entspricht dem physikalischen Verhalten des Mediums und erscheint vom rein mathematischen Standpunkt zunächst etwas willkürlich. Gl. (3. 9) können aber auch durch Spezialisierung aus dem nunmehr folgenden allgemeinen Fall der elastischen Nachwirkung gewonnen werden.

d) Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung in der allgemeinst möglichen Form.

Bei der Ableitung der Spannungsdehnungsgleichungen [vgl. Gl. (3, 2)] muß die Existenz eines elastischen Potentials vorausgesetzt werden. Nun ist aber gerade die Existenz eines elastischen Potentials mit der allgemeinen Form der elastischen Nachwirkung unvereinbar, denn das Potential (die Energie) kann nur dann eine eindeutige Funktion der Variablen sein, wenn das Verhalten des Stoffes von der Vorgeschichte der Bewegung unabhängig ist. Entsprechend ist auch die Taylorreihenentwicklung zunächst nur von sehr beschränktem Wert, denn die Reihen konvergieren notwendigerweise nur für sehr kleine Werte der Variablen oder nur für spezielle Arten der Deformation. Man würde sich daher versucht fühlen, auf die bekannte Boltzmannsche Nachwirkungsfunktion zurückzugreifen und die allgemeine elastische Nachwirkung durch Integralformeln darzustellen. Eine strengere Untersuchung, die durch die folgenden Ergebnisse nahegelegt wird, zeigt aber, daß es auch keine allgemeine Nachwirkungsfunktion geben kann, d. h., daß diese Boltzmannsche Funktion selbst von der Vorgeschichte und der speziellen Art der Bewegung abhängen muß und daß somit das Boltzmannsche Verfahren einen praktisch bedeutungslosen Formalismus darstellt. Und doch gibt es einen sehr naheliegenden Ausweg aus diesen Schwierigkeiten: Man beschränkt sich auf streng harmonische Vorgänge und setzt nachträglich die resultierenden Spannungen und Dehnungen aus ihren harmonischen Komponenten zusammen. Die Vorgeschichte der Bewegung ist dann in den Fourierkomponenten voll enthalten und die Existenz eines elastischen Potentials gesichert; denn infolge der strengen Periodizität ist natürlich auch die Vorgeschichte der harmonischen Komponenten eindeutig festgelegt und entsprechend die Energie eine eindeutige Funktion der Variablen. Für die periodische Bewegung konvergieren daher auch die Taylorreihenentwicklungen, oder sie lassen sich in konvergenter Form darstellen.

Wenn wir uns also bei unseren Betrachtungen auf harmonische Vorgänge beschränken, können wir die Existenz eines elastischen Potentials sowie die Konvergenz der Taylorentwicklungen voraussetzen und den bisher eingeschlagenen Weg weiter verfolgen.

Im allgemeinen Fall der elastischen Nachwirkung hängen die Spannungen nicht nur von den Deformationen und den Deformationsgeschwindigkeiten, sondern auch von ihren sämtlichen zeitlichen Ableitungen ab. Man kann nun leicht, und zwar auf ähnliche Weise wie beim Medium, mit innerer Reibung zeigen, daß in Verbindung

mit jeder höheren zeitlichen Ableitung zwei weitere Materialkonstanten λ'' , μ'' auftreten, so daß die ursprünglichen Größen λ , μ durch zwei Operatoren der Form

$$\lambda^0 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} + \lambda'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots, \quad \mu^0 + \mu' \frac{\partial}{\partial t} + \mu'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \quad (3.10)$$

zu ersetzen sind. Bedingung ist allerdings, daß das Rechenergebnis konvergiert, sonst müßte eine andere Darstellung dieser Operatoren, etwa nach Art der analytischen Fortsetzung versucht werden. Damit geht z. B. (3.3) über in:

$$X_x = \left(\lambda^0 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} + \lambda'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2 \left(\mu^0 + \mu' \frac{\partial}{\partial t} + \mu'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.11)$$

usw. Es leuchtet ein, daß es sich hier um eine elastische Nachwirkung handelt. Denn die auf der rechten Seite von (3.11) auftretenden zeitlichen Ableitungen bestimmen als Koeffizienten der entsprechenden Taylor-Entwicklungen den gesamten zeitlichen Verlauf der Deformationen. Beispielsweise gilt für irgendeine von ihnen, die wir mit dem Buchstaben e bezeichnen wollen,

$$e = (e)_0 + t (\partial e / \partial t)_0 + \frac{t^2}{2} (\partial^2 e / \partial t^2)_0 + \dots \quad (3.12)$$

Umgekehrt hängen so auch die Spannungen vom gesamten zeitlichen Verlauf der Deformationen ab; wir haben daher den allgemeinsten Fall der elastischen Nachwirkung vor uns (vgl. auch Fußnote 8, S. 358).

Bildet man $\tau \partial X_x / \partial t$ und addiert es zu X_x , so erkennt man, daß, wie behauptet, das Gleichungssystem (3.9) nur einen Spezialfall der hier allgemein behandelten Abhängigkeit der Spannungen von den verschiedenen zeitlichen Ableitungen der Deformationen darstellt.

Für harmonische Schwingungen ist eine wesentliche Vereinfachung möglich. Dann sind nämlich alle höheren zeitlichen Ableitungen durch die Kreisfrequenz ω bestimmt ($d/dt = i\omega$) und die unendlich vielen Materialkonstanten λ'' , μ'' können zu zwei komplexen Funktionen der Frequenz zusammengefaßt werden:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\omega) &= \lambda^0 - \omega^2 \lambda'' + \omega^4 \lambda'''' + \dots + i\omega (\lambda' - \omega^2 \lambda''' + \omega^4 \lambda^{(5)} \dots), \\ \bar{\mu}(\omega) &= \mu^0 - \omega^2 \mu'' + \omega^4 \mu'''' + \dots + i\omega (\mu' - \omega^2 \mu''' + \omega^4 \mu^{(5)} \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Dieser allgemeinst mögliche Fall der elastischen Nachwirkung entspricht vollkommen dem unter b behandelten Medium mit innerer Reibung, nur daß jetzt sowohl die beiden Elastizitätskonstanten λ_1 , μ_1 als auch die beiden Verlustkonstanten λ_2 , μ_2 frequenzabhängig werden.

e) Elastische Fernwirkung.

Bisher haben wir angenommen, daß die Spannungen außer von den Deformationen nur noch von deren zeitlichen Ableitungen abhängen. Mit der gleichen Berechtigung müssen wir zunächst auch eine Abhängigkeit von ihren räumlichen und gemischten Differentialquotienten zulassen. Man zeigt dann genau wie früher, daß mit jeder räumlichen Ableitung wieder zwei neue Materialkonstanten in Erscheinung treten, so daß die Operatoren (3.10) durch wesentlich kompliziertere $d/dt = i\omega$, d/dx , d/dy , d/dz und deren Potenzen und Produkte enthaltende Reihen zu ersetzen sind. Da die räumlichen Ableitungen auch im harmonischen Fall von der besonderen Schwingungsform abhängen, können die Materialeigenschaften nicht mehr auf zwei einfache, von der Schwingungsform unabhängige komplexe Funktionen der Frequenz zurückgeführt werden. Man erkennt aber, daß ähnlich wie das Eingehen der zeitlichen Ableitungen in die Taylor-Entwicklung der Spannungen eine elastische Nachwirkung bedeutet, das Auftreten der räumlichen Ableitungen eine elastische Fernwirkung darstellt; eine solche Fernwirkung liegt tatsächlich auch infolge der Wärmeleitung in voll-

kommenster Form vor. Die höheren Temperaturen der komprimierten Stellen gleichen sich durch die einsetzende Wärmeströmung mit den tieferen Temperaturen der dilatierten Materialstellen aus, unabhängig von ihrer jeweiligen Entfernung. Daraus folgt weiterhin, daß die Spannungen nicht als endliche Taylor-Reihe nach den Deformationsgeschwindigkeiten und deren Ableitungen dargestellt werden können, so daß der Fall der Wärmeleitung eine besondere Behandlung erfordert.

Es wäre wohl denkbar, daß die Spannungen auch bei Ausschließung des Einflusses der Wärmeleitung noch von den niedrigeren räumlichen Ableitungen der Deformationen abhingen. Da aber bisher ein solcher Fall nicht beobachtet wurde, wollen wir ihn aus dem Kreis unserer Betrachtungen ausschließen.

3. Die primitiven elastischen Grundkonstanten μ und λ .

In den vorangehenden Abschnitten haben wir gesehen, daß dem realen Medium sowohl die Eigenschaft der elastischen Nachwirkung, als auch die der elastischen Fernwirkung zuerkannt werden muß. Es zeigte sich, daß eine strenge Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung verhältnismäßig leicht durchführbar ist, während eine allgemeine Behandlung der elastischen Fernwirkung auf kaum überwindliche Schwierigkeiten stößt und höchstens in Spezialfällen zu verwirklichen ist. Selbst im durchsichtigen Fall der Wärmeleitung sind bisher nur spezielle Probleme gelöst oder grobe Näherungen angegeben worden. Wir werden bei Bedarf später auf sie zurückgreifen und die allgemeine Lösung unter Berücksichtigung der Wärmeleitung einer neuen Arbeit vorbehalten.

Im folgenden sei jede Art von elastischer Fernwirkung ausgeschlossen; praktisch bedeutet dies, daß eventuelle Fernwirkungen, wie z. B. der Einfluß der Wärmeleitung, gesondert, etwa durch eine Art Störungsrechnung berücksichtigt werden müssen. Unter dieser Voraussetzung also sind die elastischen Eigenschaften des Mediums durch die beiden komplexen und frequenzabhängigen Materialkonstanten (3. 13) $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$ vollkommen bestimmt, deren Realteile Elastizitätskonstanten, deren Imaginärteile Verlustkonstanten darstellen. Die Größen μ und λ wurden für das ideal elastische und verlustlose Medium bereits von Lamé eingeführt und nach diesem benannt — hier im allgemeinsten möglichen Fall der elastischen Nachwirkung erscheinen sie in komplexer und frequenzabhängiger Form.

Die Materialkonstante $\bar{\mu}$ ist mit dem (komplexen) Schubmodul des Mediums identisch, wie man erkennt, wenn man die Komponenten η und ζ der Verschiebung Null setzt. Die erste der Gl. (3. 2 b) bzw. (3. 3 b) geht dann in die bekannte Definitionsgleichung des Schubmoduls über. Wir bezeichnen diesen wie üblich mit G und setzen daher

$$\bar{\mu} = G = G_0 (1 + i g). \quad (4. 1)$$

G_0 bedeutet den Realteil des Schubmoduls, d. h. den mit der Deformation gleichphasigen Anteil der Schubsteife des Mediums und g den Verlustfaktor des Schubmoduls, also die Tangente des Phasenwinkels zwischen Schubspannung und Deformation.

Zur Deutung von λ betrachten wir am zweckmäßigsten den Fall der allseitig gleichmäßigen Dilatation, der durch $X_x = Y_y = Z_z = p$ (p der allseitig gleichmäßige Zug) charakterisiert ist. Addition der 3 Gleichungen (3. 2 a) liefert dann:

$$3 p = (3 \lambda + 2 \mu) \operatorname{div} \mathfrak{s} = (3 \lambda + 2 \mu) \frac{\delta V}{V} \quad (4. 2)$$

mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{\delta V}{V},$$

wo $\delta V/V$ offensichtlich die relative Volumenzunahme durch die Deformation bedeutet. Die Größe

$$K = \frac{p}{\delta V/V} = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (4.3)$$

pfllegt man als kubischen Elastizitätsmodul zu bezeichnen. Er setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, der eine durch die Schubspannungen μ , der andere durch die „Lamésche Dilatationssteife“ λ hervorgerufen. (Ähnlich wie bei Gasen und Flüssigkeiten die Zähigkeits- (Schub-) Reibung selbst bei allseitig gleichmäßiger Kompression zu einem Reibungsglied führt, geben auch die Schubspannungen zu einer Erhöhung der Volumensteife des Mediums Anlaß.) Die Größe

$$\bar{\lambda} = \bar{L} = L_0 (1 + i l) \quad (4.4)$$

(L_0 Realteil der Laméschen Dilatationskonstanten, l Verlustfaktor der Laméschen Dilatationskonstanten), die wir künftig als Lamésche Dilatationssteife oder Laméschen Dilatationsmodul bezeichnen wollen, stellt somit den nicht durch die Schubspannungen bedingten Anteil der Volumensteife des Stoffes dar.

Wir haben uns bei der Ableitung der Spannungsgleichungen für den Schub- und den Laméschen Dilatationsmodul entschieden, da nur diese beiden als physikalisch unabhängige Grundkonstanten angesehen werden können. Das Verhalten von Buna S (vgl. die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper II) wird dies erläutern; dort sind die beiden primitiven Verlustkonstanten l , g tatsächlich völlig unabhängig voneinander, die eine im gesamten Frequenzbereich bis zu einigen Megahertz annähernd konstant ($l \approx 0,1$), die andere stark mit der Frequenz zunehmend. Durch jede andere Wahl der Grundkonstanten wäre diese physikalische Unabhängigkeit verlorengegangen und beide hätten den ausgeprägten Frequenzgang des Schubmoduls angenommen. Damit haben wir gleichzeitig die Schubbewegung oder Torsion und die Dilatation als Grundformen der Deformationsbewegung anerkannt, aus denen jede andere Art der Bewegung zusammengesetzt werden muß. Vom Standpunkt der Kontinuumsmechanik hätten wir natürlich ebenso gut irgendwelche anderen zwei Elastizitätsmoduln, z. B. G und E oder G und m oder K und m usw., als unabhängige Grundkonstanten und entsprechend die Torsion und die komplexe Bewegung eines in der Achsenrichtung belasteten Stabes, die Torsion und die Querkontraktion oder die Dilatation und die Querkontraktion usw., als Grundformen der Deformationsbewegung einführen können; da aber die übrigen Elastizitätskonstanten durch lineare Transformationen aus μ und λ hervorgehen, würden jeder der beiden neuen Konstanten die Besonderheiten der primitiven Grundkonstanten, z. B. in bezug auf Frequenzabhängigkeit, anhaften und die physikalischen Verhältnisse würden nicht mehr so klar und durchsichtig zu Tage treten, wie man es bei μ und λ erwarten kann.

4. Definition der verschiedenen Elastizitätskonstanten.

Bevor wir uns Einzelheiten zuwenden, seien einige allgemeinere Begriffsbildungen und Definitionen vorausgeschickt. Eine Elastizitätskonstante wird immer als das Verhältnis einer Spannung zu der sie hervorrufenden Deformation definiert; im Fall der ersten Laméschen Konstanten μ , des Schubmoduls, war es die durch die Winkeländerung dividierte Schubspannung, beim Laméschen Dilatationsmodul λ das Verhältnis der entsprechenden Dilatationsspannung zur Dilatation. In der Praxis hat es sich nun bewährt, eine Reihe weiterer Elastizitätskonstanten einzuführen, wie sie häufig auftretenden Fällen entsprechen. So kennzeichnet z. B. der E -Modul das Verhältnis der Longitudinalspannung eines Stabes zu seiner Dehnung in der Achsenrichtung, der kubische Elastizitätsmodul das des Druckes zur Kompression. Die Einführung dieser „technischen Elastizitätskonstanten“ hat den Vorteil, daß die

speziellen Probleme dann durch eine einzige, jeweils charakteristische Elastizitätskonstante beschrieben werden.

Man kann noch einen Schritt weitergehen und auch in komplizierteren Fällen Elastizitätskonstanten einführen, indem man die dimensionslosen Deformationen (3. 1) durch allgemeinere Differentialausdrücke (z. B. die Krümmung) ersetzt. Als Beispiel hierfür mag die Differentialgleichung der transversal beanspruchten dünnen Platte herangezogen werden:

$$\frac{h^2}{12} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \Delta^2 \Delta^2 \xi = p. \quad (5. 1)$$

E Elastizitätsmodul, m Querkontraktionszahl (Verhältnis der Längsdehnung zur Querkontraktion), p Druck je Flächeninhalt, h Plattendicke, $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Die Größe

$$\frac{E m^2}{m^2 - 1} \quad (5. 2)$$

läßt sich hier als Plattenmodul definieren, denn sie ist die die Deformation der Platte beherrschende Elastizitätskonstante.

Auch durch Schwingungs- oder Wellenprobleme können Elastizitätskonstanten eingeführt werden. Für Dilatationswellen gilt z. B. die Gleichung¹¹

$$\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta^2 \Phi \quad (5. 3)$$

(Φ Geschwindigkeitspotential), so daß

$$\lambda + 2\mu \quad (5. 4)$$

die „Schallsteife“ des Mediums darstellt. Die entsprechende Deformation ist hier durch $\Delta^2 \Phi$ gegeben.

5. Definition des Verlustfaktors.

Da es verlustlose Medien nicht gibt, sind die Elastizitätskonstanten — wie schon die primitiven Grundkonstanten $\bar{\mu}$ und $\bar{\lambda}$ — immer komplex bzw. im nicht harmonischen Fall $\partial/\partial t$ enthaltende Operatoren. Wir können hier von nichtharmonischen Vorgängen absehen, da solche auf Grund der Fourier-Theoreme leicht aus ihren harmonischen Komponenten aufgebaut bzw. in sie zerlegt werden können. Eine komplexe Elastizitätskonstante bedeutet, daß Spannung und Deformation nicht gleichphasig verlaufen. Wenn wir uns das Beispiel des zu Dehnschwingungen angeregten Stabes vor Augen halten, so gilt definitionsgemäß:

$$E = \frac{X_x}{\partial \xi / \partial x} = \frac{|X_x| e^{i\Theta}}{\partial \xi / \partial x} = \frac{|X_x|}{\partial \xi / \partial x} \cos \Theta (1 + i \operatorname{tg} \Theta) = E_0 (1 + i \operatorname{tg} \Theta) \quad (6. 1)$$

($|X_x|$ Absolutbetrag der Spannung, Θ Phasenwinkel der Spannung, bezogen auf die Deformation). Die Größe $\eta = \operatorname{tg} \Theta$ pflegt man als Verlustfaktor oder Vorwärmegrad

¹¹ Sie wird erhalten, wenn man die Ausdrücke (3. 2) für die Spannungen in die allgemeinen Elastizitätsgleichungen¹⁰

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

usw. einsetzt und die resultierende Gleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi + \mu \Delta^2 \xi \quad (6. 5)$$

mit Hilfe des Ansatzes $v = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ [Darstellung eines Vektors aus seinen Quellen und Wirbeln, Φ skalares Potential, \mathfrak{A} Vektorpotential] und der bekannten Beziehung $\Delta^2 \xi = \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \xi$ in zwei Teile zerlegt, nämlich in (6. 3) und in die Wellengleichung für dilatationsfreie (d. h. $\operatorname{div} \xi = 0$) Schubwellen:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\varrho} \Delta^2 \mathfrak{A} \quad (6. 6)$$

zu definieren; es wird sich aber als notwendig erweisen, η als Verlustfaktor jener Elastizitätskonstanten zu bezeichnen, die bei dem speziellen Deformationsvorgang in Erscheinung tritt, in unserem Fall der Dehnung eines Stabes; also als Verlustfaktor des E -Moduls. Die Verlustleistung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dt} \right) \lim_{T \rightarrow \infty} &= \frac{1}{T} \int_0^T |X_x| \cos(\omega t + \Theta) \frac{\partial \xi}{\partial x} d(\cos \omega t) = \\ &= \frac{\omega}{2} X_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \sin \Theta = \frac{\omega}{2} \eta E_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Da andererseits die Gesamtenergie der Schwingung (potentielle Energie im Augenblick der größten Deformation) $W = \frac{1}{2} E_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$ ist, so gilt für W die Differentialgleichung

$$dW/dt = \omega \eta W. \quad (6.3)$$

Die Lösung lautet:

$$W = W_0 e^{-\omega \eta t}, \quad (6.4)$$

d. h. $\omega \eta$ ist die Abklingkonstante der Energie, $\omega \frac{\eta}{2}$ die der Amplitude der freien Schwingung.

Ein wenig anders und nicht so klar liegen die Verhältnisse bei allgemeineren Schwingungsproblemen; wir wollen sie generell durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + M_0 (1 + i \eta) L_n \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right) y = 0 \quad (6.5)$$

darstellen. M_0 bedeutet darin den Realteil der im Schwingungsproblem auftretenden Elastizitätskonstanten, η den zugehörigen Verlustfaktor und $L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ stellt einen nur die räumlichen Ableitungen enthaltenden Differentialoperator dar, dessen Ordnung durch den Index n gekennzeichnet sei. Wendet man diesen Operator auf die Amplitudenfunktion $y(x, z)$ an, so erhält man, sofern es sich um eine freie Schwingung oder Welle handelt, das Rechenergebnis:

$$L_n \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right) y = \bar{a}^n y. \quad (6.6)$$

Darin bedeutet \bar{a} eine komplexe Konstante. Für die ebene Welle z. B. ist

$$y = e^{-\alpha x + i \omega (x/c - t)} \quad (6.7)$$

(α Dämpfung [Neper/cm], c Phasengeschwindigkeit) und der Operator der Wellengleichung lautet:

$$L_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \quad (6.8)$$

mit $n = 2$ für Longitudinalwellen, mit $n = 4$ für Biegewellen. Somit ist

$$L_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y = \left(-\alpha + \frac{i \omega}{c} \right)^n y = \frac{i \omega}{c} \left(1 + \frac{i c \alpha}{\omega} \right)^n y = \bar{a}^n y. \quad (6.9)$$

Wir bedienen uns hier mit Absicht einer ausführlichen Darstellung, denn die eleganten Methoden der Literatur haben sich als unkorrekt erwiesen; ist eine Dämpfung vorhanden, so muß a immer komplex angenommen werden, sonst würde man bereits bei Biegewellen unrichtige Ergebnisse erzielen. — Andererseits ist $\ddot{y} = -\omega^2 y$. Trägt man diesen Wert und (5.9) in (5.5) ein, so erhält man eine komplexe Gleichung, deren Realteil die Phasengeschwindigkeit c , deren Imaginärteil die Abklingkonstante $\delta = \alpha c$ bestimmt. Man erhält, je nachdem ob es sich um Longitudinal- ($n = 2$)

oder Biegewellen ($n = 4$) handelt, unter der praktisch meistens erfüllten Voraussetzung $\eta \ll 1$:

$$\begin{aligned}\delta \text{ long.} &= \omega \frac{\eta}{2}, \\ \delta \text{ bieg.} &= \omega \frac{\eta}{4} \cdot \dagger\end{aligned}\quad (6.10)$$

Der Verlustfaktor einer Schwingung oder Deformationsbewegung geht also aus einer einfachen Messung ihrer Abklingzeit hervor. Er ist keine eigentliche Materialkonstante im Gegensatz zu der in der Literatur in den letzten Jahren fast ausnahmslos vertretenen Meinung, sondern nur ein Bestandteil der in dem entsprechenden Problem auftretenden Elastizitätskonstanten. Unsere nächste Aufgabe ist es daher, die Verlustfaktoren der verschiedenen Elastizitätskonstanten aus denen der primitiven Grundkonstanten μ , λ zu berechnen.

6. Die verschiedenen Elastizitätskonstanten und ihre Verlustwinkel.

a) Der Schubmodul, Schub- und Torsionsschwingungen.

Die erste der Elastizitätskonstanten, der wir begegneten, war die Grundkonstante μ , der Schubmodul. Um uns der gebräuchlichen Schreibweise anzugleichen, setzen wir

$$\mu = G_0 (1 + i g) \quad (7.1)$$

(G_0 Realteil des Schubmoduls, g Verlustfaktor des Schubmoduls). Der Schubmodul charakterisiert die Schubschwingungen des freien Mediums, die durch die Wellengleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} = \mu \Delta^2 \mathfrak{U} \quad (7.2)$$

[vgl. (5.6)] bestimmt sind, und Torsionsschwingungen in Stäben:¹²

$$j(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = G \frac{\partial}{\partial x} C^*(x) \frac{\partial y}{\partial x} \quad (7.3)$$

[$j(x)$ polares Massenträgheitsmoment je Längeneinheit, $G \cdot C^*(x)$ Torsionssteife]. Entsprechend stellt $\eta_g = g$ den Verlustfaktor von Schub- und Torsionsschwingungen dar.

b) Die Lamésche Dilatationskonstante.

Die zweite der primitiven Grundkonstanten war die Lamésche Dilatationskonstante:

$$\lambda = L_0 (1 + i l). \quad (7.4)$$

Da auch die Schubspannungen zur Dilatationssteife des Stoffes beitragen [vgl. (4.3)], tritt λ nur in Verbindung mit μ auf und ist somit keiner direkten Messung zugänglich. In diesem Nachteil liegt offenbar der Grund, weshalb die Konstante λ nicht generell Verwendung fand, obwohl die Wahl von μ , λ als Grundkonstante vom physikalischen Standpunkt jeder anderen Möglichkeit weit überlegen ist.

c) Der E -Modul und die Poissonsche Querkontraktionszahl m , Dehn- und Biegeschwingungen dünner Stäbe.

Die bekannteste der technischen Elastizitätskonstanten ist wohl der E -Modul, der die Elastizitätskonstante eines in der Achsenrichtung gedehnten Stabes darstellt.

† Anmerkung während des Druckes: Genaue Untersuchungen an Klanghölzern haben gezeigt, daß die elementare Biegelehre zwar die elastischen Verhältnisse, nicht aber die innere Reibung korrekt beschreibt. Man muß daher im Falle von Biegeschwingungen den komplexen E -Modul durch eine neue Elastizitätskonstante ersetzen, deren Realteil zwar mit dem des E -Moduls identisch, deren Imaginarteil aber offenbar größer, im Falle der Klanghölzer sogar 2- bis 3mal größer als der des E -Moduls ist.

¹² Vgl. Geiger-Scheel: Handbuch der Physik, Bd. VI, Kap. 4, Ziffer 34.

Wir lassen die Stabrichtung mit der x -Richtung zusammenfallen und setzen: $X_x = p$ (konstanter Zug in der Achsenrichtung), $Y_y = Z_z = 0$, $e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0$.

Mit diesen Werten folgt aus den Gl. (3. 2):

$$\begin{aligned} X_x = p &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu e_{xx}, \\ 0 &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu e_{yy}, \\ 0 &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu e_{zz}, \end{aligned} \quad (7. 5)$$

in denen e_{xx} , e_{yy} usw. durch (3. 1) gegeben sind. Addition der drei letzten Gleichungen ergibt:

$$p = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathfrak{s}. \quad (7. 6)$$

Eliminieren von $\operatorname{div} \mathfrak{s}$ in der ersten Gl. (7. 5) führt dann zu:

$$p = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{xx}. \quad (7. 7)$$

Damit ist auch der E -Modul bestimmt, denn es gilt:

$$E = p/e_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (7. 8)$$

In Verbindung mit dem E -Modul pflegt man häufig die Poissonsche Querkontraktionszahl m als zweite Grundkonstante einzuführen. Sie ist definiert als das Verhältnis der Dilatation eines Stabes in seiner Längsrichtung zu seiner Querkontraktion. Aus der zweiten und dritten Gl. (7. 5) folgt für diesen Fall:

$$e_{yy} = e_{zz} = \frac{\lambda}{2\mu} \operatorname{div} \mathfrak{s} = p \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)2\mu}. \quad (7. 9)$$

So ergibt sich für die Poissonsche Querkontraktionszahl der Ausdruck:

$$m = \frac{e_{xx}}{e_{yy}} = 2 \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right), \quad (7. 10)$$

bzw.

$$\frac{\mu}{\lambda} = (m - 2)/2. \quad (7. 11)$$

Für einen Stab aus inkompressiblem Material ist $\operatorname{div} \mathfrak{s} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$ und $e_{yy} = e_{zz}$, also $e_{xx} = 2e_{yy} = 2e_{zz}$ und folglich $m = 2$. Wie man leicht mit Hilfe des Energieprinzips nachweisen kann, ist dies auch der kleinste Wert, den m annehmen kann. Die Abweichung der Zahl m von ihrem Minimum 2 stellt somit gemäß Gl. (7. 11) ein Maß für das Verhältnis der Schubsteife zur Laméschen Dilatationssteife des Stoffes dar. Da die Schubsteife erfahrungsgemäß immer endlich ist (sie muß zwischen 0,5 und 0,667 E liegen), kann die Lamésche Dilatationssteife des inkompressiblen Mediums nur unendlich sein.

Setzt man (7. 11) in (7. 8) ein, so folgt für den E -Modul der weitere Ausdruck:

$$E = \frac{2\mu(m+1)}{m}. \quad (7. 12)$$

In der Folge wollen wir annehmen, daß die durch (7. 1) und (7. 4) definierten Verlustfaktoren l und g kleine Größen sind, so daß ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden können. Eine solche Annahme ist zwar nicht immer zulässig, doch lassen sich die entsprechenden Korrekturen leicht nachträglich einführen. Unter dieser Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} m &= m_0(1 + i\Delta) = 2 \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) = 2 \left\{ 1 + \frac{G_0}{L_0} [1 + i(g - e) + \dots] \right\} = \\ &= 2 \left(1 + \frac{G_0}{L_0} \right) \left(1 + \frac{iG_0(g - l)}{G_0 + L_0} \right) = m_0 \left[1 + i(g - l) \frac{m_0 - 2}{m_0} \right] \\ &\text{mit } m_0 = 2 \left(1 + \frac{G_0}{L_0} \right), \end{aligned} \quad (7. 13)$$

d. h. die Tangente Δ des Phasenwinkels der Querkontraktion ist gegeben durch:

$$\Delta = (g - l) \frac{m_0 - 2}{m_0}. \quad (7.14)$$

Nur die Querkontraktionszahl eines inkompressiblen Mediums ($m = 2$) ist Δ somit phasenrein, in allen anderen Fällen tritt ein Phasenwinkel auf, der durch den des Schub- und des Laméschen Dilatationsmoduls bestimmt ist.

Auf völlig analoge Art ergibt sich aus (7.12) und (7.14) für den E -Modul:

$$\begin{aligned} E &= 2 G_0 (1 + i g) \left[1 + \frac{1}{m_0} (1 - i \Delta + \dots) \right] = \frac{2 G_0 (m_0 + 1)}{m_0} \left(1 - \frac{i \Delta}{m_0 + 1} \right) (1 + i g) = \\ &= E_0 \left[1 + i \frac{(m_0^2 + 2) g + (m_0 - 2) l}{m_0 (m_0 + 1)} \right], \quad \text{d. h. } \eta_E = \frac{(m_0^2 + 2) g + (m_0 - 2) l}{m_0 (m_0 + 1)}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Der Verlustfaktor des E -Moduls und auch der sämtlichen übrigen Elastizitätskonstanten setzt sich, wie wir sehen werden, aus dem des Schubmoduls und dem der Laméschen Dilatationssteife zusammen. Sowohl für inkompressible Stoffe ($m = 2$), wie z. B. Buna oder Gummi, als auch für solche mit sehr hohem m ($m = \infty$) stimmt der Verlustfaktor gemäß (7.15) mit dem des Schubmoduls überein und weicht auch sonst, vorausgesetzt, daß l und g von der gleichen Größenordnung sind, nur unwesentlich von letzterem ab [der Koeffizient von g in (7.15) nimmt seinen kleinsten Wert 0,90 für $m = 4,46$ an]. Die Verluste des E -Moduls sind also im wesentlichen durch die des Schubmoduls bestimmt.

Der E -Modul charakterisiert sowohl die Ausbreitung von Longitudinalwellen:

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.16)$$

als auch die von Transversalschwingungen (Biegeschwingungen) in dünnen Stäben:

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = E R \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \quad (7.17)$$

R Trägheitsradius des Querschnittes für eine zur Biegungsebene senkrechte, durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Achse). Entsprechend sind auch diese beiden Schwingungsarten immer und prinzipiell durch den gleichen Verlustfaktor $\eta = \eta_E$ gekennzeichnet.

d) Der kubische Elastizitätsmodul, Kompressionsschwingungen.

Der kubische Elastizitätsmodul wurde bereits in Abschnitt 4 (4.3) abgeleitet. Mit Hilfe der Ausdrücke (7.1), (7.4) und (7.10) geht er über in:

$$\begin{aligned} K &= L_0 + \frac{2}{3} G_0 + i \left(l L_0 + \frac{2}{3} g G_0 \right) = K_0 \left[1 + i \frac{3 l + g (m_0 - 2)}{m_0 + 1} \right], \\ \text{d. h. } \eta_K &= \frac{3 l + g (m_0 - 2)}{m_0 + 1} \\ \text{mit } K_0 &= L_0 \left(1 + \frac{2}{3} G_0 / L_0 \right) = \frac{L_0}{3} (m_0 + 1). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Für schwach kompressible Stoffe ($m \sim 2$) ist $\eta_K \sim l$, für $m = \infty$ gilt $\eta_K = g$. Der Verlustfaktor des Kompressionsmoduls kann leicht im Kundtschen Rohr bestimmt werden, indem man eine kleine Materialprobe in den Druckbauch einer stehenden Welle bringt und die Vergrößerung der Halbwertbreite mißt.¹³

¹³ E. Meyer und K. Tamm: Akust. Z. 7, 45 (1942).

e) Der Plattenmodul. Transversalschwingungen dünner Platten.

Sowohl in der Plattengleichung (5.1) als auch in der Wellengleichung für transversale Plattenschwingungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E m^2 h^2}{12 (m^2 - 1)} \Delta^2 \Delta^2 \xi, \quad (7.19)$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(h Dicke der Platte, ξ transversale Verschiebung) erscheint als Elastizitätskonstante der Ausdruck:

$$B = \frac{E m^2}{m^2 - 1}, \quad (7.20)$$

der außer dem komplexen E -Modul die ebenfalls komplexe Querkontraktionszahl enthält. Er sei nach W. Kuhl als Plattenmodul bezeichnet. Mit Hilfe von (7.15) und (7.14) erhält man ähnlich wie früher:

$$B = E \left(\frac{1}{1 - 1/m^2} \right) = E_0 (1 + i \eta_E) \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{m_0^2 (1 + 2 i \Delta t \dots)}} \right] =$$

$$= \frac{E_0}{1 + \frac{1}{m_0^2}} \left[1 + i \left(\eta_E - \frac{2 \Delta}{m_0^2 - 1} \right) \right] = B_0 \left[1 + i \frac{(m_0^3 - m_0^2 + 2) g + (m_0^2 - m_0 - 2) l}{(m_0^2 - 1) m_0} \right],$$

$$\text{d. h. } \eta_B = \frac{(m_0^3 - m_0^2 + 2) g + (m_0^2 - m_0 - 2) l}{(m_0^2 - 1) m_0}. \quad (7.21)$$

Die Grenzfälle $m = 2$ und $m = \infty$ führen hier zu $\eta_B = g$. Das Minimum des Koeffizienten von g in η_B beträgt 0,83 und liegt etwa bei $m = 3,4$. Auch der Verlustfaktor der Plattenschwingung ist somit wesentlich durch den des Schubmoduls bedingt.

f) Die Schallsteife, Dilatationswellen.

In Gl. (5.3), der Wellengleichung für Schallwellen, wurde die Größe

$$S = \lambda + 2\mu = (L_0 + 2G_0) \left(1 + i \frac{L_0 l + 2G_0 g}{L_0 + 2G_0} \right) =$$

$$= S_0 \left(1 + i \frac{L_0 l + 2G_0 g}{L_0 + 2G_0} \right) = E \frac{m \cdot m - 1}{(m + 1)(m - 2)} (1 + i \eta_S) \quad (7.22)$$

$$\text{mit } \eta_S = \frac{L_0 l + 2G_0 g}{2 c_0^2} = \frac{l + (m_0 - 2) g}{m_0 - 1}$$

als Schallsteife des Mediums eingeführt. Zur Abkürzung haben wir $L_0 = 2G_0 = 2 c_0^2$ gesetzt, da c_0 , wie hier als bekannt vorausgesetzt sei, die Schallgeschwindigkeit von Dilatationswellen bedeutet. Die Abklingkonstante ist durch $\frac{\omega \eta}{2}$ Neper/sek. gegeben [vgl. (5.10)] und folglich die Dämpfung von Dilatationswellen durch:

$$\alpha = \frac{\omega \eta}{2 c_0} = \frac{\omega (L_0 l + 2G_0 g)}{2 c_0^3} \text{ Neper/cm.} \quad (7.23)$$

In der Schreibweise von Abschnitt c nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{c_0^3} \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \text{ Neper/cm.} \quad (7.23b)$$

Dieses Ergebnis wird durch das Experiment bestätigt. Die klassische Stokes-Kirchhoffsche Theorie hätte um ein Drittel zu kleine Zähigkeitsdämpfung (μ) erbracht und die oft 1000fach größere Kompressionsreibung (λ) sogar völlig unterschlagen. An dieser Stelle sei unsere Aufmerksamkeit noch auf den Einfluß der Schubspannungen hingelenkt. Man erkennt aus (7.22) ohne weiteres, daß sie einen wesentlichen Beitrag

Tabelle 1.

Deformation	Elastizitätskonstanten (Realteil)	Verlustfaktor η	η $m_0 = 2$	η $m_0 = 3, 4$	η $m_0 = \infty$
Schub- oder Torsionsschwingungen	G_0	$(m_0^2 + 2)g + (m_0 - 2)l$ $m_0(m_0 + 1)$	g	g	g
Longitudinal- oder Biegeschwingungen dünner Stäbe	$E_0 = \frac{2G_0(m_0 + 1)}{m_0}$		g	$0,91g + 0,09l$	g
Kompressionsschwingungen	$K_0 = \frac{L_0}{3} (m_0 + 1)$	$\frac{3l + (m_0 - 2)g}{m_0 + 1}$	l	$0,32g + 0,68l$	g
Transversalschwingungen dünner Platten	$B_0 = \frac{E_0 m^2}{m^2 - 1}$	$(m_0^3 - m_0^2 + 2)g + (m_0^2 - m_0 - 2)l$	g	$0,83g + 0,17l$	g
Dilatationswellen	$S_0 = \varrho c_0^2 = I_0 (m_0 - 1)$	$\frac{l(m_0 - 2)g}{m_0 - 1}$	l	$0,58g + 0,42l$	g

zur Schallsteife des Mediums leisten und dieser Tatsache ist auch — wenigstens zum Teil — die erhöhte Schallgeschwindigkeit fester Körper gegenüber Flüssigkeiten zuzuschreiben.

g) Zusammenstellung der Ergebnisse.

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Elastizitätskonstanten und ihren Verlustfaktoren sind nochmals in Tab. 1 zusammengestellt. Spalte 1 beschreibt die Art der Deformationsbewegung, Spalte 2 enthält den Realteil der entsprechenden Elastizitätskonstanten. Der allgemeine Ausdruck für den Verlustfaktor als Funktion der primitiven Verlustkonstanten l und g geht aus Spalte 3 hervor. Aus den folgenden sind die Grenzfälle $m = 2$ (inkompressibles Medium oder Medium ohne Formelastizität), $m = \infty$ (sehr schubsteifes Medium) und der Fall $m = 3, 4$, der bei Metallen häufig vorliegt, ersichtlich. Die Grenzfälle sind besonders interessant, denn hier wird je nach Art der Schwingung entweder der Verlustfaktor des Schubmoduls oder der der Laméschen Dilatationskonstanten gemessen, so daß die Versuchsbedingungen leicht zu übersehen sind; der Fall $m = 2$ wird in „Theorie der inneren Reibung und die Materialverluste fester Körper II“ experimentell belegt werden. Bemerkenswert ist, daß der Verlustfaktor des Schubmoduls mit einem Gewicht von der Größenordnung 90% den der meisten übrigen Elastizitätskonstanten bestimmt. Nur in den Kompressionsmodul und in die Schallsteife geht auch der Verlustfaktor der Laméschen Dilatationskonstanten wesentlich ein.

Die Tabelle bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß der Verlustfaktor wesentlich von der Schwingungsform abhängt, es sei denn, daß l und g gleich groß wären. Die Summe der Koeffizienten von l und g in den Formeln für den Verlustfaktor (3. Spalte der Tabelle) ist nämlich immer gleich 1, so daß der Verlustwinkel sämtlicher übrigen Elastizitätskonstanten gleich ist, sofern nur zwei von ihnen einen gleich großen Verlustwinkel aufweisen. Denn für $l = g$ ist ja

$$\eta = la + g(1 - a) = g = l \quad (7.24)$$

($a, 1 - a$ Koeffizienten von l und g in den Formeln für den Verlustfaktor). Dieser Fall tritt tatsächlich bei Hysterese ein, die bei tiefen Frequenzen häufig alle anderen Dämpfungsarten überwiegt (vgl. „Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper II“). Dieser Tatsache ist es wohl-

auch zuzuschreiben — die meisten Messungen wurden ja nur bei tiefen Frequenzen ausgeführt —, wenn die Meinung Fuß fassen konnte, daß der Verlustfaktor eine von der Schwingungsform unabhängige Größe sei, daß also gleiches η sich z. B. sowohl für Torsions- als auch für Longitudinalwellen ergeben müßte. Diese irrige Auffassung wurde durch die Beobachtung gleicher η -Werte für Longitudinal- und Biegewellen in dünnen Stäben noch gestützt. Man übersah dabei, daß hier ein Spezialfall vorliegt (in Übereinstimmung mit der strengen Theorie), der nicht weiter verallgemeinert werden darf.

Eine volle Erfassung der Materialverluste erfordert immer die Bestimmung von l und g , also die Festlegung zweier im allgemeinen unbekannter Größen. Sie können aus zwei verschiedenen Schwingungsformen ermittelt werden, die man nach Maßgabe der Stoffdaten aus obiger Tabelle auswählt. Häufig wird es möglich sein, durch Messungen von Schub- oder Torsionswellen das g zu finden und dann mit Hilfe des so bestimmten g -Wertes das l z. B. aus Kompressionsschwingungen zu berechnen.

Die in der vorliegenden Arbeit angestellten Überlegungen liefern die nötigen Hilfsmittel für eine mathematisch und physikalisch strenge Erfassung der Materialverluste. Die Theorie ist generell und enthält außer den genannten Einschränkungen (gesonderte Behandlung der Fernwirkungserscheinungen) keinerlei Vernachlässigungen oder Näherungsansätze. In der Fortsetzung dieser Arbeit „Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper II“ sollen dann die einzelnen Dämpfungsursachen selber und ihre Auswirkung auf die Verlustkonstanten untersucht und der Versuch unternommen werden, sie auf eine Reihe besonders typischer Erscheinungsformen, wie Hysterese, plastisches Fließen, Relaxation des Schub- und Dilatationsmoduls usw., zurückzuführen. Am Ende sollen die theoretischen Überlegungen an Hand von Meßbeispielen (Eisen, verschiedene Aluminiumsorten und Gummi) in einem weiten Frequenzbereich veranschaulicht und besprochen sowie Einzelheiten über das Meßverfahren und den logarithmisch anzeigenden Schnellpegelschreiber von $1/200$ sek. Einschwingzeit mitgeteilt werden.

(Eingegangen am 21. Juli 1947.)

On Steady, Laminar, Round Jets in Compressible Viscous Gases far Behind the Mouth.¹

By M. Z. Krzywoblocki, Univ. of Illinois, Urbana, Il., U. S. A.

Summary. The work represents an expansion of Schlichting's solution for the non-compressible case, where-by the effects of compressibility are taken care of, step by step, by series-representation. Since an asymptotic representation for the development of the coordinates in the direction of the jet axis is being used, the solutions obtained can only be considered valid at a considerable distance from the orifice.

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung der Schlichtingschen Lösung für den inkompressiblen Fall dar, wobei der Einfluß der Zusammendrückbarkeit schrittweise durch Reihendarstellung berücksichtigt wird. Da eine asymptotische Darstellung für die Entwicklung nach der Koordinate in Richtung der Strahlachse verwendet wird, können die hier gewonnenen Resultate erst in hinreichender Entfernung von der Ausflußöffnung Geltung haben.

Résumé. Ce travail constitue une contribution à la solution indiquée par Schlichting, pour le cas d'un fluide incompressible, il a été tenu compte de l'influence de la compressibilité par un calcul de proche en proche, avec développement en série. Comme la progression suivant l'axe du jet est donnée en représentation asymptotique, les résultats acquis ne sont valables qu'à partir d'une certaine distance de l'orifice.

¹ Presented at the Meeting of the American Mathematical Society, Applied Mathematics Section, University of Chicago, February 28, 1948.

Introduction.

Schlichting² solved the problem of a laminar, steady, round jet in an incompressible viscous fluid issuing from a small hole in a wall and then mixing with the surrounding medium at rest (axially symmetrical jet). In the present paper the problem of such a jet in a compressible viscous fluid is solved. The following equations were taken into account: equations of motion, continuity, energy and state. The coefficients of viscosity and thermal conductivity are assumed to be functions of temperature. Not to obscure the problem by many items of a simple algebraic nature the paper presents only an outline of the method of attack. The method enables one to calculate the distribution of the velocity, density, etc., far behind the mouth.

1. Basic Equations.

Assuming that the coefficients of viscosity " μ " and heat conductivity " K " are variable functions³ one obtains the following equations (equation of motion, continuity, state and energy):

$$\varrho \left\{ \vec{V}_t + \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} \right) \vec{V}^2 \right] - (\vec{V} \times \vec{\omega}) \right\} = \varrho \vec{F} - \text{grad } p - \left(\frac{2}{3} \right) (\text{grad } \mu) (\text{div } \vec{V}) + \\ + 2 (\text{grad } \mu \cdot \nabla) \vec{V} + (\text{grad } \mu) \times \vec{\omega} + \frac{1}{3} \mu \text{grad} (\text{div } \vec{V}) + \\ + \mu (\nabla^2 \vec{V}), \text{ where } \vec{\omega} = \text{curl } \vec{V}, \quad (1)$$

$$\varrho_t + \nabla (\varrho \vec{V}) = 0, \quad p = R \varrho T, \quad (2)$$

$$J c_v \varrho (T_t + \vec{V} \cdot \text{grad } T) + p (\text{div } \vec{V}) = J [(\text{grad } K) \cdot (\text{grad } T) + \\ + K \text{div} (\text{grad } T)] + \Phi, \quad (3)$$

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \nabla [(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}] + \omega^2 - 2 \vec{V} \cdot \text{grad} (\text{div } \vec{V}) - \left(\frac{2}{3} \right) (\text{div } \vec{V})^2 \right\}. \quad (3a)$$

Assume a steady axially symmetrical flow in cylindrical polar coordinates without the external forces (the force due to the variable density is also neglected), with the z -axis and the " w " velocity component in the direction of the flow, with the radial direction denoted by " r " and the radial velocity component denoted by " u " and with the equation of state included in the equation of energy. The equations may be represented in the form:

$$\varrho w w_z - \mu w_{rr} = -p_z - \varrho u w_r + \mu_r w_r + \left(\frac{1}{r} \right) \mu w_r + \left(\frac{1}{3} \right) \mu \left[u_{zz} + \left(\frac{u_z}{r} \right) \right] + \\ + \left(\frac{4}{3} \right) (\mu w_z)_z - \left(\frac{2}{3} \right) \mu_z \left[u_r + \left(\frac{u}{r} \right) \right] + \mu_r u_z, \quad (4)$$

$$\varrho w u_z - \left(\frac{4}{3} \right) \mu u_{rr} = -p_r - \varrho u u_r + \left(\frac{4}{3} \right) \left[\left(\frac{1}{r} \right) \mu u_r + \mu_r u_r \right] + \left(\frac{1}{3} \right) \mu \left[w_{zz} - \left(\frac{u}{r^2} \right) \right] - \\ - \left(\frac{2}{3} \right) \mu_r \left[w_z + \left(\frac{u}{r} \right) \right] + \mu_z w_r + (\mu u_z)_z, \quad (5)$$

$$w \varrho_z = -\varrho w_z - \left(\frac{1}{r} \right) (\varrho r u)_r, \quad p = R \varrho T, \quad (6)$$

$$J (c_v \varrho w T_z - K T_{rr}) = -R \varrho T \left[w_z + \left(\frac{u}{r} \right) + u_r \right] - J c_v \varrho u T_r + \\ + J \left\{ (K T_z)_z + \left[K \left(\frac{1}{r} \right) + K_r \right] T_r \right\} + \Phi, \quad (7)$$

² H. Schlichting: Laminare Strahl ausbreitung. Z. angew. Math. Mechan. **13**, Nr. 4, 261-262 (Aug. 1933). Also: Modern Developments in Fluid Dynamics, edited by S. Goldstein. Oxford: Clarendon Press. 1938.

³ It is quite enough to assume that both " μ " and " K " are functions of the temperature only and not of the pressure. Both functions may be assumed to be polynomials or power series in T with properly selected coefficients (convergent series).

$$\Phi = \mu \left\{ \left(\frac{4}{3} \right) \left[(w_z^2 - w_z u_r + u_r^2) - \left(\frac{u}{r} \right) \left(w_z - \left| \frac{u}{r} \right| + u_r \right) \right] + (w_r + u_z)^2 \right\}, \quad (7a)$$

where subscripts denote partial differentiation.

A further assumption is that the jet-cross sections taken into consideration are located very far downstream behind the mouth. In an application of a series expansion in negative powers of " x " this assumption enables one to neglect consistently the higher powers of $\left(\frac{1}{x} \right)$. Consequently the expansion is an asymptotic one for large " x ".

A brief explanation of the method of solution of the set of differential equations will be given. The coefficients on the left hand sides of those equation will be assumed so as to obtain ordinary linear differential equations of the second order. On the right hand sides the results from the preceding approximations will be used. The results will be presented in forms of series:⁴

$$w = \sum_1^n w_i, \quad u = \sum_1^n u_i, \quad \varrho = \varrho_\infty + \sum_1^n \varrho_i, \quad T = T_\infty + \sum_1^n T_i.$$

2. Initial Approximation.

Assume that the gas jet flows through a small hole in the wall of the radius " R_0 ". The velocity distribution across the cross section of the hole being constant, one may write: $M = \pi \varrho_0 R_0^2 w_0^2$, where " M " denotes the rate at which the momentum flows across the initial section of the jet. This relation permits one to find the value " w_0 ". The calculations given below will present the velocity-, density-, and temperature-patterns across the jet at some distance from the wall. The value " w_0 " will serve as an auxiliary parameter.

3. First Approximation.

a) Longitudinal velocity component.

Put $w_1 \sim z^{-p} f(\eta)$, $\eta \sim r z^{-q}$. Since the rate " M " must be constant in all the cross sections, one has in the first approximation

$$M = 2 \pi \varrho_\infty \int_0^\infty w_1^2 r dr \sim \int_0^\infty z^{-2p} f^2 z^{2q} \eta d\eta.$$

Hence $2p = 2q$. Another condition is that w_{1z} must be of the same degree in " z " as w_{1rr} or $p + 1 = p + 2q$. These two conditions give the values: $p = q = \frac{1}{2}$. The longitudinal velocity component will be always calculated from the first equation of motion. In the first approximation put: $u = 0$, $\mu = \mu_\infty$, $\varrho = \varrho_\infty$,⁵ $w w_z = \sim w_0 w_{1z}$, and neglect the variation of the pressure i.e. $p_z = 0$. In this approximation only the terms $\sim z^{-3/2}$ will be retained. One easily obtains

$$\varrho_\infty w_0 w_{1z} - \mu_\infty w_{1rr} = 0. \quad (8)$$

Introduce a non-dimensional coordinate⁶

$$\eta = r \left(\frac{w_0}{2 \nu_\infty z} \right)^{1/2}, \quad \nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\varrho_\infty}, \quad \eta_z = \left(-\frac{1}{2} \right) z^{-1} \eta, \quad \eta_r = \left(\frac{w_0}{2 \nu_\infty z} \right)^{1/2}, \\ w_1 = A_1 w_0 z^{-1/2} \exp(-c \eta^2). \quad (9)$$

⁴ The subscript "0" denotes the values referring to the conditions inside the container from which the gas flows out. The subscript " ∞ " refers to the conditions in the undisturbed gas at rest outside the container.

⁵ See the explanation below why to take ϱ_∞ and not ϱ_0 . [Chapter: (c), Density.]

⁶ This is the well-known Prandtl's transformation used for the first time in a boundary layer problem by H. Blasius: Z. Math. Physik **56**, 4-13 (1908). A thorough discussion of the method of asymptotic expansion applied in the present paper may be found in: S. Goldstein: On the Two-dimen. Steady Flow of a Viscous Fluid behind a solid Body. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **142**, 545-562 (1933).

Boundary conditions are that w_1 must tend to zero when $z \rightarrow \infty$, must tend to zero exponentially when $r \rightarrow \infty$, and from the symmetry conditions w_1 must be an even function of r i.e. $w_{1r} = w_{1\eta} = 0$ for $r = \eta = 0$. Substituting (9) into (8) one obtains

$$w_{1z} = \left(-\frac{1}{2}\right) A_1 w_0 z^{-3/2} (1 - 2c\eta^2) \exp(-c\eta^2),$$

$$w_{1rr} = (-A_1) \left(\frac{w_0^2}{v_\infty}\right) z^{-3/2} (1 - 2c\eta^2) c \exp(-c\eta^2),$$

or $c = \frac{1}{2}$. The final form is

$$w_1 = A_1 w_0 z^{-1/2} \exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\eta^2\right], \quad (10)$$

with all the boundary conditions fulfilled. The value of A_1 will be calculated from the condition that the rate " M " must be constant in all the cross sections:

$$M = 2\pi \varrho_\infty \int_0^\infty w_1^2 r dr = 2\pi A_1^2 \mu_\infty w_0, \quad (11)$$

$$A_1 = M^{1/2} (2\pi \mu_\infty w_0)^{-1/2} (\text{inch}^{1/2}). \quad (12)$$

b). Transverse velocity component.

This component will be always calculated from the second equation of motion. But in order to find the highest degree in " z " of " u ", calculate the value of " u_{t1} " from the continuity equation for the incompressible fluid: $w_{1z} + \left(\frac{1}{r}\right)(u_{t1} + r u_{tr}) = 0$. Putting

$$u_{t1} = A_2 z^{-1} g_{t1}(\eta), \quad A_2 = \left(\frac{v_\infty w_0}{2}\right)^{1/2} (\text{in}^2 \text{sec}^{-1}), \quad (13)$$

one obtains

$$g_{t1} + \eta g_{t1\eta} = \eta (\eta^2 - 1) \exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\eta^2\right],$$

or

$$g_{t1} = -(\eta + \eta^{-1}) \exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\eta^2\right] + \text{Const.} \quad (14)$$

It is obvious that $u_{t1} \sim z^{-1}$ is of higher degree in z than w_1 and hence $u_1 = 0$.⁷

c) Density.

The density will be always calculated from the continuity equation. The density must be equal to ϱ_∞ for $z \rightarrow \infty$ and $r \rightarrow \infty$. Hence put: $\varrho = \varrho_\infty + \sum_1^\infty \varrho_i$. Put on the left hand side of the equation of continuity the values $w = \sim w_0$, $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, and on the right hand side the values $\varrho = \varrho_0$, $w = w_1$, $u = 0$. Retaining the terms $\sim z^{-3/2}$ one obtains: $w_0 \varrho_z = -\varrho_0 w_{1z}$, or

$$\varrho_1 = -\varrho_0 w_0^{-1} w_1 = -A_1 \varrho_0 z^{-1/2} \exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\eta^2\right]. \quad (15)$$

The boundary conditions for " ϱ_1 " are identical with those for " w_1 ".

⁷ In order to verify whether the value $u_1 = 0$ fulfills the second equation of motion to the first degree of approximation put into this equation on the left hand side the values $w = \sim w_0$, $u = u_1$, $\varrho = \varrho_\infty$, $\mu = \mu_\infty$, and on the right hand side the values $u = 0$, $w = w_1$, and preserve the terms $\sim z^{-3/2}$. Obtain $\varrho_\infty w_0 u_{1z} - \left(\frac{4}{3}\right) \mu_\infty u_{1rr} = 0$. Thus $u_1 = 0$ is really a solution. The boundary condition for u are: $u = 0$ for $x \rightarrow \infty$ and for $y \rightarrow \infty$ (exponentially). From the symmetry conditions u must be an odd function of y i.e. $u(0) = 0$.

⁸ ϱ_1 was assumed to be $\sim \varrho_0$.

d) Temperature.

The temperature will be always calculated from the energy equation. In the first approximation only the terms $\sim z^{-3/2}$ will be retained. The temperature in infinity must be equal to T_∞ . Hence put: $T = T_\infty + \sum_1^\infty T_i$. On the left hand side of the energy equation put $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $w = \sim w_0$, $K = K_\infty$, $T = T_\infty + T_1$, $T_1 \sim z^{-1/2}$. On the right hand side put the values of w_1 , u_1 , $K = K_\infty$, $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$. The boundary conditions for " T_1 " are similar to those for " w_1 ". Obtain

$$J (c_v \varrho_\infty w_0 T_{1z} - K_\infty T_{1rr}) = -R \varrho_\infty T_0 w_{1z}. \quad (16)$$

Introduce a non-dimensional coordinate:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= r \left(\frac{c_v w_0 \varrho_\infty}{2 K_\infty z} \right)^{1/2} = B \eta, \quad B = \left(\frac{c_v \mu_\infty}{K_\infty} \right)^{1/2}, \\ \bar{\eta}_z &= \left(-\frac{1}{2} \right) z^{-1} \bar{\eta}, \quad \bar{\eta}_r = \left(\frac{c_v w_0 \varrho_\infty}{2 K_\infty z} \right)^{1/2}, \\ T_1 &= A_3 T_0 z^{-1/2} h_1(\bar{\eta}), \quad A_3 = A_1 R (J c_v)^{-1} (\text{in}^{1/2}). \end{aligned} \quad (17)$$

After substituting (17) into (16) and performing the necessary transformations one obtains:

$$h_1'' + \bar{\eta} h_1' + \bar{h}_1 = (B^{-2} \bar{\eta}^2 - 1) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) B^{-2} \bar{\eta}^2 \right]. \quad (18)$$

Put:

$$\bar{h}_1 = \bar{p}_1(\bar{\eta}) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right],$$

and obtain:

$$(\bar{p}_1'' - \bar{\eta} \bar{p}_1') \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] = (B^{-2} \bar{\eta}^2 - 1) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) B^{-2} \bar{\eta}^2 \right]. \quad (19)$$

One complementary function of the equation is $\bar{p}_1 = \text{const.} = 1$, hence put $\bar{p}_1 = 1 + \bar{r}_1(\bar{\eta})^9$ and obtain:

$$(\bar{r}_1'' - \bar{\eta} \bar{r}_1') \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] = (B^{-2} \bar{\eta}^2 - 1) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right], \quad (20)$$

or

$$\frac{d}{d\bar{\eta}} \left\{ \bar{r}_1' \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] \right\} = (B^{-2} \bar{\eta}^2 - 1) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right], \quad (21)$$

hence

$$\bar{r}_1' \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] = -\bar{\eta} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) B^{-2} \bar{\eta}^2 \right] + A_4. \quad (22)$$

Since from the boundary conditions $\bar{r}_1'(0) = 0$, it must be $A_4 = 0$. In the next step one obtains

$$\bar{r}_1 = (B^{-2} - 1)^{-1} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (B^{-2} - 1) \bar{\eta}^2 \right] + A_5. \quad (23)$$

A_5 must be calculated and is not equal to zero.¹⁰ The final result is

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_1 &= A_3 T_0 z^{-1/2} \left\{ A_6 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) B^{-2} \bar{\eta}^2 \right] + A_5 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] \right\}, \\ T_1 &= A_3 T_0 z^{-1/2} \left\{ A_6 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] + A_5 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) B^2 \eta^2 \right] \right\}, \quad A_6 = \frac{B^2}{(1 - B^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

⁹ Such a substitution was done in order to preserve the analogy with the further approximations.

¹⁰ A_5 will be determined from the condition that with no heat dissipation from the jet the total heat content (enthalpy) expressed as $\text{mass} \times i = \text{mass} \times c_p (T - T_\infty) = 2 c_p \int_0^\infty (\varrho_\infty + \varrho_1) u_1 T_1 dy = \text{const.}$, in each cross section.

e) Coefficients of viscosity and heat conductivity.

Assuming that μ can be expressed as $\mu = \bar{\mu} (1 + a T + b T^2 + \dots)$ and K as $K = K_0 c_p \mu$, and substituting the value $T = T_\infty + T_1$, one obtains

$$\mu_1 = \mu_\infty + \bar{\mu} \sum_1^n G_{2i} T_i^2, \quad K_1 = K_0 c_p \mu_1. \quad (25)$$

4. Second Approximation.

a) Longitudinal velocity component.

Put into the first equation of motion on the left hand sides the values $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $w = w_0 + w_2$, $w_z = w_{1z} + w_{2z}$, $w_{rr} = w_{1rr} + w_{2rr}$, $\mu = \mu_1$, $w_2 \sim z^{-1}$, and on the right hand side the values $p = R \varrho T$, $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $T = T_\infty + T_1$. Retain only the terms $\sim z^{-2}$:

$$w_0 \varrho_\infty w_{2z} - \mu_\infty w_{2rr} = \bar{\mu} G_{11} \left(\frac{1}{r} \right) (r w_{1r} T_1)_r - w_0 \varrho_1 w_{1z} - R (\varrho_1 T_1)_z. \quad (26)$$

All the functions have to be taken as functions of η . The solution of this equation will follow precisely the procedure outlined in the calculation of T_1 . The main points are following:

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= w_0 z^{-1} f_2(\eta), \quad f_2 = k_2 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right], \\ w_0^2 \varrho_\infty z^{-2} (f_2'' + \eta f_2' + f_2) &= w_0^2 \varrho_\infty z^{-2} (k_2'' - \eta k_2' + k_2) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] = F_2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

One complementary function of this equation is η . Hence put: $k_2 = \eta g_2$:

$$\left. \begin{aligned} w_0^2 \varrho_\infty z^{-2} [\eta g_2'' + (2 - \eta^2) g_2'] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] &= F_2, \\ \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^2 g_2' \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] \right\} &= A_7 (1 - \eta^2) \eta \exp (-\eta^2), \\ g_2' &= \left(\frac{1}{2} \right) A_7 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] + A_8 \eta^{-2} \exp \left[\left(\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

To fulfil the boundary condition that $g_2' = 0$ for $\eta = 0$ and $\eta \rightarrow \infty$, the constant of integration A_8 must be equal to zero:

$$g_2 = \left(\frac{1}{2} \right) A_7 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right), \quad \text{with } \int_0^\eta \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] d\eta = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right), \quad (29)$$

and with the constant of integration equal to zero.¹² The result is:

$$w_2 = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} A_7 w_0 z^{-1} \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right]. \quad (30)$$

The boundary conditions that $w_{2\eta} = 0$ for $\eta = 0$ and $\eta \rightarrow \infty$ are fulfilled. But $w_2(0) = 0$ whereas it should be $w_2(0) \neq 0$. Hence find a distinct solution k_{22} of the homogeneous equation (27): $(k_2'' - \eta k_2' + k_2) = 0$, and the final result is:

$$w_2 = w_0 z^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} A_7 \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) + A_{81} k_{22} \right] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right], \quad (31)$$

with all the boundary conditions fulfilled.

¹¹ The functions and coefficients not given in the text are given in the Appendix.

¹² To fulfil the boundary conditions.

¹³ The rate " M " with the value of A_1 and with $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $u = u_1 + u_2$, must be constant in each cross section. This will give the value of A_{81} .

b) Transverse velocity component.

Put on the left hand side of the second equation of motion the values $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $w = \sim w_0 + w_2$, $\mu = \mu_1$, $u = u_2 \sim z^{-1}$, and on the right hand side the values: $p = R \varrho T$, $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $T = T_\infty + T_1$, $w = w_1 + w_2$, $u = 0$, $\mu = \mu_1$. Retaining the terms $\sim z^{-2}$ one obtains:

$$3 \varrho_\infty w_0 u_{2z} - 4 \mu_\infty u_{2rr} = \mu_\infty w_{1rz}. \quad (32)$$

The procedure of solving (32) is the same as above:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= A_9 w_0 z^{-1} m_2(\eta), \quad m_2 = n_2 \exp \left[\left(-\frac{3}{8} \right) \eta^2 \right], \\ A_9 w_0^2 \varrho_\infty z^{-2} (4 m_2'' + 3 \eta m_2' + 6 m_2) &= \\ &= A_9 w_0^2 \varrho_\infty z^{-2} (4 n_2'' - 3 \eta n_2' + 3 n_2) \exp \left[\left(-\frac{3}{8} \right) \eta^2 \right] = (-2) \mu_\infty w_{1rz}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

One complementary function is η . Hence put: $n_2 = \eta t_2$:

$$\left. \begin{aligned} A_9 w_0^2 \varrho_\infty z^{-2} [4 \eta t_2'' + (8 - 3 \eta^2) t_2'] \exp \left[\left(-\frac{3}{8} \right) \eta^2 \right] &= (-2) \mu_\infty w_{1rz}, \\ \frac{d}{d\eta} \left\{ 4 \eta^2 t_2' \exp \left[\left(-\frac{3}{8} \right) \eta^2 \right] \right\} &= (\eta^2 - 3) \eta^2 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right], \\ 4 t_2' &= (-\eta) \exp \left[\left(-\frac{1}{8} \right) \eta^2 \right], \quad t_2 = \exp \left[\left(-\frac{1}{8} \right) \eta^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

with the constants in both integrations equal to zero. The final result is

$$u_2 = A_9 w_0 z^{-1} \eta \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right], \quad A_9 = A_1 \mu_\infty^{1/2} (2 w_0 \varrho_\infty)^{-1/2} \text{ (inch)}, \quad (35)$$

with all the boundary conditions fulfilled.¹⁴

c) Density.

Put into the equation of continuity on the left hand side the values $w = \sim w_0 + w_2$, $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1 + \varrho_2$, etc., and on the right hand side the values $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1$, $u = u_2$, etc., and keep the terms $\sim z^{-2}$:

$$w_0 \varrho_{2z} = -\varrho_\infty w_{2z} - \left(\frac{1}{r} \right) (r u_2 \varrho_1)_r. \quad (36)$$

Put: $\varrho_2 = \varrho_0 z^{-1} v_2(\eta)$, $A_{10} = A_1 A_9 \left[\frac{w_0}{(2 \varrho_\infty)} \right]^{1/2} \text{ (inch)}$, and obtain:

$$(\eta v_2 \eta + 2 v_2) = 4 A_{10} (\eta^2 - 1) \exp(-\eta^2) - \left(\frac{\varrho_\infty}{\varrho_0} \right) (\eta w_{22} \eta + 2 w_{22}). \quad (37)$$

One may easily notice that the solution is

$$v_2 = (-2) A_{10} \exp(-\eta^2) - \left(\frac{\varrho_\infty}{\varrho_0} \right) w_{22}, \quad (38)$$

with all the boundary conditions fulfilled.

d) Temperature.

Put on the left hand side of the energy equation the values $\varrho = \varrho_\infty + \varrho_1 + \varrho_2$, $w = \sim w_0 + w_2$, $T = T_\infty + T_1 + T_2$, etc., and on the right hand side the values from the first and the second approximation (except T_2). Retaining the terms $\sim z^{-2}$ gives

$$J (c_v \varrho_\infty w_0 T_{2z} - K_\infty T_{2rr}) = H_2. \quad (39)$$

¹⁴ The velocity component u_{t1} calculated from the continuity equation (equation 14) has a singular point for $\eta = 0$. The value u_2 has no singularities.

¹⁵ Bar over a letter denotes a function of η . For example: k_{22} is a function of η , \bar{k}_{22} is the same function with $\bar{\eta}$ as the independent variable.

Apply the method derived above:

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_2 &= T_0 z^{-1} \bar{h}_2(\bar{\eta}), \quad \bar{h}_2 = \bar{p}_2 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right], \\ B_1 z^{-2} (\bar{h}_2'' + \bar{\eta} \bar{h}_2' + 2 \bar{h}_2) &= B_1 z^{-2} (\bar{p}_2'' - \bar{\eta} \bar{p}_2' + \bar{p}_2) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] = F_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

One complementary function is η , hence put: $p_2 = \bar{\eta} \bar{r}_2$:

$$\begin{aligned} B_1 z^{-2} [\bar{\eta} \bar{r}_2'' + (2 - \bar{\eta}^2) \bar{r}_2'] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] &= F_{31}, \\ \bar{\eta}^2 \bar{r}_2' \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] &= \bar{I}_3, \end{aligned}$$

with the constant of integration equal to zero. The final result is (with the second constant of integration not equal to zero):¹⁶

$$\bar{T}_2 = T_0 z^{-1} \sum_1^5 \bar{h}_{2i}, \quad (41)$$

with all the boundary conditions fulfilled.

e) Coefficients of viscosity and heat conductivity.

$$\mu_2 = \mu_\infty + \bar{\mu} [G_{21} (T_1 + T_2) + G_{31} (T_1^2 + T_2^2) + G_{32} T_1 T_2 + \dots], \quad K_2 = K_0 c_p \mu_2. \quad (42)$$

5. Third Approximation.

a) Longitudinal velocity component.

The third approximation will be outlined only. Retaining the terms $\sim z^{-5/2}$ gives

$$\varrho_\infty w_0 w_{3z} - \mu_\infty w_{3rr} = H_3, \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3 &= w_0 z^{-3/2} f_3, \quad f_3 = k_3 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right], \\ w_0^2 \varrho_\infty z^{-5/2} (f_3'' + \eta f_3' + 3 f_3) &= w_0^2 \varrho_\infty z^{-5/2} (k_3'' - \eta k_3' + \\ &\quad + 2 k_3) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] = F_3. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

One complementary function of the last equation is $(1 - \eta^2)$. Put $k_3 = (1 - \eta^2) g_3$ and obtain:

$$w_0^2 \varrho_\infty z^{-5/2} (1 - \eta^2)^2 g_3' \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right] = \int_0^\eta F_3 (1 - \eta^2) d\eta + C. \quad (45)$$

The constant integration C must be zero to fulfil the boundary condition $g_{3\eta} = 0$ for $\eta \rightarrow \infty$. The further procedure is only routine work. The result is:

$$w_3 = w_0 z^{-3/2} (1 - \eta^2) g_3 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right]. \quad (46)$$

Few remarks will be given concerning the boundary conditions. w_3 and $w_{3\eta}$ for $\eta \rightarrow \infty$ will be always zero because of the presence of the term $\exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right]$. It may happen that $g_{3\eta}(\eta) \neq 0$. In this case one may use a distinct solution of the homogeneous equation (44) in the form $f_{31} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right]$, $f_{31} = C_6 \sum_{i=1,3,\dots}^\infty b_i \eta^i$. Hence the general solution will be:

$$w_3 = w_0 z^{-3/2} [(1 - \eta^2) g_3 + f_{31}] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right]. \quad (47)$$

¹⁶ The constant of integration D_1 will be determined from the condition that mass $\times i = \int_0^\infty (\varrho_\infty + \varrho_1 + \varrho_2) (u_1 + u_2) (T_1 + T_2) dy = \text{constant}$ in each cross section.

The constant C_6 must be chosen so as to make $w_{3\eta}(0) = 0$. In case $w_3(0) = 0$, one may add another distinct solution of (44) in the form $(1 - \eta^2) \exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\eta^2\right]$, which will give a finite value at the boundary.¹⁷ In (45) there will appear a term containing the ratio $\left(\frac{1}{\eta}\right)$. The way of solution of the differential equation with such a term will be discussed in 5 b).

b) Transverse velocity component.

Retaining the terms $\sim z^{-5/2}$ in the second equation of motion gives the expression

$$w_0 \varrho_\infty u_{3z} - \left(\frac{4}{3}\right) \mu_\infty u_{3rr} = K_3, \quad u_3 = w_0 z^{-3/2} m_3, \quad m_3 = n_3 \exp\left[\left(-\frac{3}{8}\right)\eta^2\right], \quad (48)$$

$$w_0^2 z^{-5/2} \varrho_\infty (4 m_3'' + 3 \eta m_3' + 9 m_3) =$$

$$= w_0^2 z^{-5/2} \varrho_\infty (4 n_3'' - 3 \eta n_3' + 6 n_3) \exp\left[\left(-\frac{3}{8}\right)\eta^2\right] = \sum_1^2 G_{3i}. \quad (49)$$

The right hand side of (49) will be split into two parts: G_{31} and G_{32} . The first part will be solved by the method explained above. Since $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right]$ is one complementary function of equation (49) one obtains:

$$4 w_0^2 \varrho_\infty z^{-5/2} \frac{d}{d\eta} \left\{ \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right]^2 t_3' \exp\left[\left(-\frac{3}{8}\right)\eta^2\right] \right\} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right] G_{31}. \quad (50)$$

The further procedure is a routine work. The second part will give

$$(4 m_3'' + 3 \eta m_3' + 9 m_3) = (4 n_3'' - 3 \eta n_3' + 6 n_3) \exp\left[\left(-\frac{3}{8}\right)\eta^2\right] =$$

$$= C_7 \left(\frac{1}{\eta}\right) \exp(-\eta^2). \quad (51)$$

The two complementary solutions of this equation are

$$n_{31} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right] \text{ and } n_{32} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right] \int \left\{ \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right]^{-2} \exp\left[\left(\frac{3}{8}\right)\eta^2\right] \right\} d\eta. \quad (52)$$

Expanding $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right]^{-2}$ and $\exp\left[\left(\frac{3}{8}\right)\eta^2\right]$ in series and integrating term by term gives the two distinct solutions of the preceding equation in the forms

$$m_{31} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right] \exp\left[\left(-\frac{3}{8}\right)\eta^2\right], \quad m_{32} = \left(\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} k_i \eta^i\right) \exp\left[\left(-\frac{3}{8}\right)\eta^2\right].$$

Expanding the Wronskian of m_{31} and m_{32}

$$\Delta(m_{31}, m_{32}) = \begin{vmatrix} m_{31} & m_{32} \\ m_{31}' & m_{32}' \end{vmatrix}$$

one obtains it in the form $\Delta = \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \eta^i\right) \exp\left[\left(-\frac{3}{4}\right)\eta^2\right]$, hence $\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ will be of the form $\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i \eta^i\right) \exp\left[\left(\frac{3}{4}\right)\eta^2\right]$. A particular solution of (51) is¹⁹

$$V_1 = (-C_7) \int \left(\frac{m_{32}}{\Delta}\right) \left(\frac{1}{\eta}\right) \exp(-\eta^2) d\eta = (-C_7) \int \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i \eta^i\right) \exp\left[\left(-\frac{5}{8}\right)\eta^2\right] d\eta.$$

¹⁷ This solution may be multiplied by a constant. This constant will be determined from the condition that the rate "M" with all the previously calculated constants and with new values of ϱ and u must be constant in each cross section.

¹⁸ See: E. L. Ince: Ordinary Differential Equations, p. 122. London: Longmans, Green and Co. 1927.

¹⁹ See: Ince, loc. cit., p. 123.

This particular solution has no singular points in the entire plane. The distinct solution m_{31} and m_{32} (multiplied by a constant) may be introduced, if necessary, to fulfill the boundary conditions.

6. Final Remarks.

The approximations of higher degree are only the matter of routine work. In the theory of incompressible fluids they use equations of motion and continuity. The velocity components may be derived from the stream function. But it is almost impossible to satisfy always all the boundary conditions for all the velocity components. Usually the u -component satisfies only one condition (for $\eta = 0$ but not for $\eta \sim \infty$). It was shown above that in the theory of compressible flow one may easily satisfy all the boundary conditions by use of the distinct solutions of homogeneous equations. This last remark refers equally to all the dependent variables.²⁰

Appendix.

3. e) $\mu_\infty = \bar{\mu} (1 + a T_\infty + b T_\infty^2 + c T_\infty^3 + \dots),$
 $G_{21} = a + 2 b T_\infty + 3 c T_\infty^2 + \dots, \quad G_{22} = b + 3 c T_\infty + \dots, \text{ etc.},$
 $K_\infty = K_0 c_p \mu_\infty.$
4. a) $F_2 = 2 \left[R (\varrho_1 T_1)_z + w_0 \varrho_1 w_{1z} - \bar{\mu} G_{11} \left(\frac{1}{r} \right) (r w_{1r} T_1)_r \right],$
 $A_7 = 2 A_1 A_6 T_0 [R \varrho_0 (w_0^2 \varrho_\infty)^{-1} + G_{11} \bar{\mu} \mu_\infty^{-1}] + A_1^2 \varrho_0 \varrho_\infty^{-1}, \text{ (inch)},$
 $k_{22} = 1 + \sum_{i=2,4,\dots}^\infty a_i \eta^i,$
 $a_2 = \left(-\frac{1}{2} \right), \quad a_4 = \left(-\frac{1}{24} \right), \quad a_6 = \left(-\frac{1}{240} \right), \quad a_8 = \left(-\frac{1}{2688} \right),$
 $a_{10} = \left(-\frac{1}{34560} \right), \text{ etc.}$
4. c) $w_{22} = \left[\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} A_7 \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) + A_{81} k_{22} \right] \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \eta^2 \right].$
4. d) $H_2 = J \left\{ \left[\left(\frac{1}{r} \right) (\bar{K} G_{11} T_1 T_{1r} r)_r \right] - c_v (w_0 \varrho_1 T_{1z} + \varrho_\infty u_2 T_{1r}) \right\} -$
 $- R \left\{ \varrho_\infty T_\infty w_{2z} + (\varrho_\infty T_1 + \varrho_1 T_\infty) \left[w_{1z} + \left(\frac{u_2}{r} \right) + u_{2r} \right] \right\} + \mu_\infty (w_{1r})^2,$
 $F_{31} = -2 H_2, \quad B_1 = J c_v \varrho_\infty w_0 T_0,$
 $\bar{I}_3 = (C_1 \bar{\eta}^2 - C_2) \exp [-B^{-2} \bar{\eta}^2] - B_2 \bar{\eta}^2 \bar{w}_{22},$
 $C_1 = (B_2 - B_3) + \left(\frac{1}{2} \right) (B_4 + B_7) + B_5 + B^{-2} B_6,$
 $C_2 = \left[B_2 - B_5 - \left(\frac{1}{2} \right) B_7 \right],$
 $B_2 = A_9 w_0 R B_1^{-1} (A_6 \varrho_\infty T_0 - A_1 \varrho_0 T_\infty) w_0^{1/2} (2 \nu_\infty)^{-1/2} \text{ (inch)},$
 $B_3 = \left(\frac{1}{2} \right) A_1 R B_1^{-1} (A_6 \varrho_\infty T_0 - A_1 \varrho_0 T_\infty) \text{ (inch)},$
 $B_4 = A_1 A_6 \varrho_0 \varrho_\infty^{-1} \text{ (inch)}, \quad B_5 = A_6 A_9 w_0^{1/2} (2 \nu_\infty)^{-1/2} \text{ (inch)},$
 $\bar{h}_{21} = C_2 \exp [-B^{-2} \bar{\eta}^2], \quad \bar{h}_{22} = C_3 \bar{\eta} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] \operatorname{erf} \left\{ \left[B^{-2} - \left(\frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \bar{\eta} \right\},$
 $\bar{h}_{23} = (-C_4) \bar{\eta} \left\{ \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] - \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) B^{-2} \bar{\eta}^2 \right] \right\} \operatorname{erf} [(B \sqrt{2})^{-1} \bar{\eta}],$

²⁰ This fact was shown by the author in several papers.

$$\bar{h}_{24} = (-C_5) \bar{\eta} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right] \int_0^{\bar{\eta}} \bar{k}_{22} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) (B^{-2} - 1) \bar{\eta}^2 \right] d\bar{\eta},$$

$$\bar{h}_{25} = D_1 \bar{\eta} \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \bar{\eta}^2 \right],$$

$$B_6 = \bar{K} K_{\infty}^{-1} G_{11} T_0 A_6^2 (\text{inch}), \quad B_7 = A_1^2 w_0^2 (J c_v T_0)^{-1} (\text{inch}),$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{2} \right) [C_1 + C_2 (2 B^{-2} - 1)] \left(B^{-2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{-1/3} \sqrt{\pi} \right),$$

$$C_4 = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/3} A_7 B (1 - B^2)^{-1} B_2, \quad C_5 = A_{81} B_2.$$

$$4. \text{ e) } G_{31} = b + 3 c T_{\infty} + \dots, \quad G_{32} = 2 b + 6 c T_{\infty} + \dots,$$

$$5. \text{ a) } H_3 = \bar{\mu} \left(\frac{1}{r} \right) \{ r [G_{21} (w_{1r} T_2 + w_{2r} T_1) + G_{31} w_{1r} T_1^2] \}_r - \\ - w_0 (w_{1z} \varrho_2 + w_{2z} \varrho_1) - \varrho_0 w_{1z} w_2 - R (\varrho_1 T_2 + \varrho_2 T_1)_z - \varrho_{\infty} w_{2r} u_2 - \\ - \varrho_1 w_{1r} u_2 + \left(\frac{1}{3} \right) \mu_{\infty} \left[4 w_{1zz} + u_{2zz} + \left(\frac{u_{2z}}{r} \right) \right], \quad F_3 = -2 H_3, \\ b_1 = 1, \quad b_3 = \left(-\frac{1}{6} \right), \quad b_5 = \left(-\frac{1}{120} \right), \quad b_7 = \left(\frac{1}{1680} \right), \quad b_9 = \left(-\frac{1}{24192} \right), \text{ etc.}$$

$$5. \text{ b) } K_3 = \left(\frac{4}{3} \right) \bar{\mu} \left[G_{21} \left(\frac{1}{r} \right) (r u_{2r} T_1)_r \right] + \bar{\mu} G_{21} \left\{ \left(\frac{1}{3} \right) T_1 \left[w_{1rz} - \left(\frac{u_2}{r^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{3} \right) T_{1r} \left[w_{1z} + \left(\frac{u_2}{r} \right) \right] + w_{1r} T_{1z} \right\} + \left(\frac{1}{3} \right) \mu_{\infty} w_{2rz} - w_0 \varrho_1 u_{2z} - \\ - \varrho_{\infty} u_2 u_{2r} - R (\varrho_2 T_2)_r, \\ G_{31} = 6 [w_0 u_{2z} \varrho_1 + u_2 u_{2r} \varrho_{\infty} + R (\varrho_2 T_2)_r] + \\ + 4 C_7 w_0^2 \varrho_{\infty} z^{-5/3} [2 (2 - \eta^2) + 1] \eta \exp (-\eta^2) - \\ - 2 \bar{\mu} G_{21} \left\{ w_{1rz} T_1 + 3 w_{1r} T_{1z} - 2 \left[w_{1z} + \left(\frac{u_2}{r} \right) \right] T_{1r} \right\} - 2 \mu_{\infty} w_{2rz}, \\ G_{32} = 3 C_7 w_0^2 \varrho_{\infty} z^{-5/2} \left(\frac{1}{\eta} \right) \exp (-\eta^2), \\ C_7 = A_0 A_9 G_{21} T_0 \bar{\mu} \mu_{\infty}^{-1} (\text{in}^{3/2}).$$

(Eingegangen am 16. November 1948.)

Buchbesprechungen.

Probleme der österreichischen Elektrizitätswirtschaft. Vorträge von *E. Fischer, K. Kraus, L. Musil* und *G. Oberdorfer*. Herausgegeben von *G. Oberdorfer*. Mit 15 Abb. und 9 Tafeln, 83 S. Graz-Wien: Leykam-Verlag. 1948. S 25.—.

Das außerordentlich aktuelle Interesse an energiewirtschaftlichen Problemen der Gegenwart unter besonderer Berücksichtigung der österreichischen Verhältnisse hat das Außeninstitut der Technischen Hochschule Graz veranlaßt, eine Vortragsreihe namhafter Autoren im Jahre 1947 zu veranstalten, die in einer Buchausgabe nunmehr vorliegt. Der Vorstand des Institutes, Herr Professor Dr. techn. G. Oberdorfer, hat damit, wie auch Herr Ministerialrat Dipl.-Ing. G. Hammerschlag des Bundesministeriums für Energiewirtschaft und Elektrifizierung in seinen einführenden Worten hervorhebt, nicht nur den Fachkollegen Interessantes von berufener Seite geboten, sondern auch der Allgemeinheit einen großen Dienst erwiesen. Werden doch durch die Veröffentlichung der Vortragsreihe die vielfach zerstreut vorhandene Literatur über eines der wichtigsten Fachgebiete in exakter Form zusammengefaßt und durch wertvolle Beiträge ergänzt. Zahlentafeln und graphische Darstellungen gebracht, die für die historische Entwicklung unserer im Aufblühen befindlichen Elektrizitätswirtschaft von besonderer Bedeutung sind.

Die Vorträge behandeln:

I. Einführende Betrachtungen zur Energiewirtschaft Österreichs (Prof. Dr. Oberdorfer);

II. Grundprobleme der österreichischen Energiewirtschaft (Prof. Dr. L. Musil);

III. Wasserkraftwirtschaft (Dr. E. Fischer);

IV. Ziel und Wege der Elektrizitätswirtschaft Österreichs (Dr. techn. Dipl.-Ing. K. Kraus).

Jeder der Vorträge hat neue Ansichten und Gedanken vorgebracht, die alle dem Bestreben dienen, das große Ziel einer ausgebauten, vorwiegend auf Wasserkraft beruhenden und gesicherten Elektrizitätswirtschaft zu erreichen. Wir können hier nur die Ausführungen unterstreichen, die Herr Dr. Kraus am Schlusse seiner Entwicklungen anführt und die darauf hinweisen, daß Österreich als das von der Natur mit Hydrokraft am reichsten ausgestattete Land Europas berufen erscheint, mit dem bewährten Können seiner Ingenieure in den großen kontinentalen Stromplänen mitbestimmend zu wirken in völkerverbindender und völkerversöhnender gemeinsamer Arbeit. Druck und Ausstattung, insbesondere die sorgfältige Wiedergabe der zahlreichen graphischen Darstellungen, sind vorzüglich.

H. Melan, Wien.

Der praktische Wärme- und Schallschutz im Hochbau. Von F. Bruckmayer. Mit 28 Textabb., VII, 126 S. Wien: F. Deuticke. 1949. S 30.—, Halbl. S 37.—, Ganzl. S 40.—.

Im I. Abschnitt des Buches ist die Wärmeisolierung (gleichdämmende Ziegeldicke), die Wärmespeicherung (gleichspeichernde Ziegeldicke) und der Wärmebedarf von Gebäuden, im II. die Schallisolierung und Raumakustik behandelt. Schließlich ist der Erschütterungsschutz ganz kurz besprochen.

Jedem Abschnitt sind die betreffenden Vorschriften (Mindestanforderungen) bzw. Normen und Grundbegriffe vorangestellt. Zahlreiche Tabellen, Einzelangaben, Diagramme und Literaturhinweise ermöglichen es dem Baufachmann, sich ausreichend und schnell über die Eignung einer bestimmten Konstruktion zu orientieren.

Das Buch ist in erster Linie als Nachschlagewerk für Baufachleute, das heißt zum praktischen Gebrauch bestimmt. Da jedoch Begriffe und Zusammenhänge ausreichend erläutert sind, werden sich auch Studierende und Nichtfachleute leicht zurechtfinden können.

C. Kämmerer, Wien.

The Aviation Mechanic's Aircraft Manual with Questions and Answers. Von J. W. Vale, jr. Mit 394 Textabb., IX, 748 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1949. 33s., \$ 6.—.

Das Buch ist ein Grundlehrgang mit Fragen und Antworten für Flugzeugmechaniker und deren Lehrer. Einige Daten sind aber ohne Zweifel auch für Flugzeugingenieure und Konstrukteure wertvoll.

Nach einer sehr kurzen, sehr elementaren Behandlung von aerodynamischen Problemen und Stabilitätsfragen geht der Verfasser sogleich zur Werkstatttechnik über und bespricht: Wärmebehandlung, Materialprüfung, Schweißtechnik, Holzbearbeitung und in instruktiver Weise die Reparaturen kleiner Schäden (auch bei Kunststoffen). Dann folgen Abschnitte über Kraftstoffbehandlung, Wartung inklusive der Organisation von Wartung und Reparatur, hydraulische und elektrische Schaltungen, Sicherheits- und Kontrollleinrichtungen.

Schließlich bringt der Verfasser in vier Anhängen eine kurze Geschichte der Luftfahrt, prinzipielle Definitionen und einfache Rechenbeispiele, AN-Normen (Army-Navy) und Tabellen. Den Abschluß bilden eine kurze Übersicht und ein Index.

Das Buch ist sehr instruktiv gehalten und erhebt keinerlei Anspruch auf Wissenschaftlichkeit.

F. Magyar, Wien.

Das natürliche Maßsystem. Kritische Untersuchung der Grundlagen zur Aufstellung eines universellen Maßsystems für Physik und Technik. Von G. Oberdorfer. Mit 2 Ausschlagtafeln, V, 34 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 8.40, sfr. 3.70, \$ 0.84.

Diese interessante Schrift lenkt die Aufmerksamkeit des Lesers auf ein oft wenig beachtetes Gebiet, nämlich das der Maßsysteme. Die Begriffe Größe, Größengleichung, Maßzahl, Maßzahlgleichung, Dimension und Einheit werden entwickelt, wobei auf die Grundeinheiten und abgeleiteten Einheiten hingewiesen wird. Definitionen und Proportionalitäten, das heißt die aus der Natur gefundene Beziehung bei der Aufzeichnung eines Naturgesetzes werden streng auseinander gehalten und der dimensionsbehaftete Proportionalitätsfaktor als Naturkonstante aufgezeigt. Aufschlußreich ist die Bemerkung über die Anzahl der Grundbegriffe und über unter- und überbestimmte Systeme.

Der Verfasser tritt in seiner Abhandlung für das natürliche Maßsystem ein, das in enger Beziehung zum cgs-System steht, nur wird aus Gründen der Elektrotechnik statt der Masse die Wirkung als Grunddimension eingeführt.

Zwei Tafeln geben einen Vergleich der Maßsysteme und die Schreibweise der wichtigsten Gesetze.

R. Bruniak, Wien.

Wave Mechanics and its Applications. Von *N. F. Mott* und *I. N. Sneddon*. Mit 68 Textabb., XII, 393 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1948. Geb. 30 s. net.

Das Buch ist für Leser bestimmt, welche die Quantenmechanik anwenden wollen. Die Autoren verzichten darauf, die grundlegenden Gleichungen so allgemein als möglich zu fundieren. Sie stellen sie vielmehr in möglichstem Anschluß an die Erfahrung und schrittweise vorgehend immer nur in der einfachsten Form auf, wie sie für die gerade behandelten Probleme vonnöten sind. Die Autoren waren bestrebt, die Anwendungen so vielseitig als möglich zu behandeln. Gerade der Leser, der mit der Wellenmechanik nicht schon vertraut ist, wird durch das Buch verhältnismäßig rasch in die Materie an Hand der einfachsten Anwendungen eingeführt und allmählich auch mit den schwierigeren Problemen bekanntgemacht.

Das Buch beginnt mit der Schrödinger-Gleichung und behandelt von diesem Gesichtspunkte die ältere Bohrsche Quantentheorie. Dann werden die Wellenfunktionen und die Störungstheorie besprochen und schließlich der Elektronenspin miteinbezogen. Dann folgt die Behandlung des Zwei-Körper-Problems und der Atome mit vielen Elektronen, ferner die Theorie der festen Substanzen. Hierher gehört auch die chemische Bindung, wobei auf die qualitativen Skizzen für Äthylen und Benzol besonders hingewiesen sei. Weiter werden die Stoßprobleme behandelt, ein Gebiet, auf welchem der eine Autor, *N. F. Mott*, sich ganz hervorragend betätigt hat. Es folgt die Wechselwirkung von Strahlung und Materie, dann die relativistische Quantenmechanik und schließlich die Matrixmechanik.

Was alles von der Wellenmechanik geleistet wurde, das lernt der Leser in ausgezeichnete Weise kennen. Die äußere Ausstattung des Buches, Papier, Druck und Einband, ist auch von hervorragender Qualität.

L. Flamm, Wien.

Die Verbrennungskraftmaschine. Herausgegeben von *H. List*. Band 4: **Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine.** Erster Teil: Grundlagen. — Die rechnerische Behandlung der instationären Strömungsvorgänge am Motor. Von *H. List* und *G. Reyl*. Mit 156 Textabb., 2 Tafeln, 4 Tab., XI, 239 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 144.—, sfr. 62.60, \$ 14.40.

Keine Forschergruppe hat sich länger, gründlicher und erfolgreicher mit dem Ladungswechsel befaßt als *H. List* und seine Mitarbeiter. In diesem Bande sind viele einschlägige und für den Betriebserfolg aller Verbrennungsmotoren überaus wichtige Forschungsergebnisse und Berechnungsverfahren in einer Form zusammengefaßt, die den Anforderungen der Praxis so gut angepaßt ist, als es eben schwierigere Rechenverfahren überhaupt vermögen. Natürlich darf man nicht mühelose Wege durch die Strömungs- und Wärmefragen erwarten, die teilweise recht schwer gefunden und gebahnt wurden, jedoch zeigen *List* und *Reyl*, sein letzter Mitarbeiter auf diesem Gebiete, deutlich, wie man zum Ziele kommen kann. Wenn zünftige Gasdynamiker, angeregt durch die vorgelegten Lösungen und erörterten Fragen neue und bequemere Wege zeigen, werden sie sich Dank verdienen.

Bewußt und mit Recht werden Begriffsbestimmungen vorausgeschickt, denen ich allgemeine Verbreitung wünsche, um die bisher häufigen Mißverständnisse zu beseitigen; dann werden die Grundlagen des Ladungswechsels gemeinsam für Zwei- und Viertakter, Otto- und Dieselmotoren behandelt. Für Ein-, Aus- und Durchströmen in Systemen ohne und mit Rohrleitungen, auch in verwickelten Fällen mit Drosselstellen, konischen und plötzlichen Erweiterungen (Zwischenbehältern) und Verzweigungen, Ladern und Abgasturbinen werden die Ansätze entwickelt, Auswertungsverfahren angegeben und nach zahlreichen Hinweisen auf andere praktisch wichtige Einzelfälle der Einsaugvorgang eines Vierzylinder-Viertakters und die Druckschwankungen in der Auspuffleitung eines Achtzylinder-V-Zweitakt Diesels und ihre Rückwirkungen auf den Luftaufwand und Liefergrad durchgerechnet und mit Versuchsergebnissen verglichen, wo solche vorlagen, wobei Übereinstimmung festgestellt wird.

Für die nichtstationäre eindimensionale Strömung in Rohrleitungen werden die allgemeinen Differentialgleichungen mitgeteilt, wird auf den Übergang von den Näherungslösungen für kleine Druckschwankungen zu genaueren Ansätzen hingewiesen und das Überlagerungsgesetz der Druckwellen mit großen Amplituden erörtert. Auch werden diese Ansätze unter Vernachlässigung der Rohrreibung und des Wärmeüberganges auf den wichtigen Fall einer nachgeschalteten Auspuffturbine angewendet. Die rechnerischen Schwierigkeiten scheinen aber, wie auch *Aschenbrenner* und andere festgestellt haben, für viele andere praktisch wichtige Fälle allzu groß, so daß für die Behandlung des Rückwurfes und Durchganges der Wellen in der Leitung die Differentialgleichung für kleine Druckänderungen mit *d'Alemberts* Lösung durch Wanderwellen nach dem Näherungsverfahren von *Pischinger* benützt wird, mit dem grundsätzlich auch die Rechnungsgänge von *Saß*, *Aschenbrenner*, *Lutz* — der jedoch *Bernoullis* Lösung durch stehende Wellen benützt — und anderen übereinstimmen.

Für die Verfolgung der meisten Vorgänge des Ladungswechsels scheint das nach den bisherigen Erfahrungen auch bei Auspuffleitungen vielfach zu genügen, wohl auch deshalb, da man lange Leitungen, in denen sich starke Druckschwankungen und Änderungen der Wellengestalt ausbilden können, soweit auszuführen pflegt, daß die Schwankungen eben mäßig bleiben. Wo dies nicht zutrifft, gestatten die angegebenen Beziehungen eine Korrektur.

Der ganze Aufbau des gut ausgestatteten Buches zielt dahin, die Rechnungswege so deutlich zu zeigen und so leicht zu machen als es die beiden erfahrenen Verfasser konnten. Wo aber die Rechnung allein nicht genügt, müssen Versuche die Entwürfe stützen. Hiefür scheint das Verfahren von *Reyl* und *Preiswerk* zur Wiedergabe der instationären Strömung in Gassäulen durch die Strömung in Kanälen mit freien Flüssigkeitsoberflächen sehr nützlich zu sein, dessen Grundlagen und Durchführung am Schlusse des Buches eingehend dargestellt werden.

Mit den hier entwickelten Ansätzen sollen in den zwei weiteren Teilbänden Zwei- und Viertakt, sowie die Ausnützung der Abgasenergie für den Ladungswechsel behandelt und damit das wichtige Gebiet des Ladungswechsels planmäßiger Bearbeitung zum Nutzen der Motorenerzeuger eröffnet werden.

L. Richter, Wien.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar und Prof. Dr. Karl Wolf, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Im Oktober erscheint:

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. Adalbert Duschek

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

Erster Band:

Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. 1949.

S 78.—, sfr. 33.90, \$ 7.80. Geb. S 87.—, sfr. 37.80, \$ 8.70

Zweiter Band:

Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie. Ausgleichsrechnung. Lineare Gleichungen und Determinanten.

Erscheint im Winter 1949/50

Dritter Band:

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Variationsrechnung.

Erscheint 1950

Vierter Band:

Grundzüge der Funktionentheorie.

Erscheint 1950

Aus dem Vorwort:

... Die Anforderungen, die die moderne Technik an den Ingenieur in den Forschungsabteilungen und in den Berechnungsbüros stellt, sind in den letzten Jahren gewaltig gestiegen und es ist unschwer vorauszusehen, daß sie in den nächsten Jahren weiter steigen werden in dem Maß, wie sich die Ergebnisse der modernen Physik in die technische Praxis umsetzen... Der wissenschaftlich arbeitende Techniker muß heute ein guter Mathematiker sein, wenn er diesen Anforderungen entsprechen will...

Wie in meinen Vorlesungen, so habe ich mich auch hier in diesem Buch vor allem bemüht, im Leser jenes tiefere Verstehen der mathematischen Begriffe und Methoden zu erwecken, ohne welches jedes Studium von vornherein aussichtslos und zum Scheitern verurteilt ist. Ich habe mich in diesem Bemühen dort, wo es mir nötig erschien, nicht von einer gewissen Breite der Darstellung abhalten lassen. Daß ich durch möglichst zahlreiche und typische Beispiele die Bedeutung und Tragweite der Methoden zu illustrieren versucht habe, ist wohl eine Selbstverständlichkeit. Demselben Zweck dienen die Übungsaufgaben, deren Wert ich durch die am Schluß des Bandes zusammengestellten Lösungen hoffentlich noch erhöht habe. Diese Lösungen enthalten bei den leichteren Aufgaben nur knappe Andeutungen über den einzuschlagenden Weg, bei schwierigeren aber recht ausführliche Diskussionen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung